

Bernstein-Bézier-Methoden und Interpolation mit bivariaten Splineräumen

Inauguraldissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Universität Mannheim

vorgelegt von
Angelika Engelmann
aus Lörrach

Mannheim, 2003

Dekan : Professor Dr. Herbert Popp, Universität Mannheim
Referent : Professor Dr. Günther Nürnberger, Universität Mannheim
Korreferent : Privatdozent Dr. Frank Zeilfelder, Universität Mannheim
Tag der mündlichen Prüfung: 13. März 2003

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Bivariate Splines	7
2.1	Der Splineraum $S_q^r(\Delta)$	7
2.2	Bernstein-Bézier-Techniken	10
2.3	Bestimmende Mengen und Dimension	14
3	Klassen von Triangulierungen	18
3.1	Beliebige Triangulierungen	19
3.2	Geordnete Kegeltriangulierungen	23
3.3	Geordnete Triangulierungen mit Fills	24
4	Minimal bestimmende Mengen von $S_q^1(\Delta)$ auf Kegeln und Zellen	27
4.1	Vereinigungen von C^1 -Mengen	29
4.1.1	C^1 -Mengen entlang einer Kante	33
4.1.2	C^1 -Mengen um einen Eckpunkt	41
4.2	Beliebige Kegel	43
4.3	Standardzellen innerer Eckpunkte	47
4.4	Standardzellen von Randpunkten	61
5	Der Splineraum $S_3^1(\Delta)$	62
5.1	Minimal bestimmende Mengen	64
5.2	Hermite-Interpolation	68
5.3	Lagrange-Interpolation	69

6	Der Splineraum $S_4^1(\Delta)$	73
6.1	Beliebige Triangulierungen vom Grad ≤ 7	75
6.1.1	Minimal bestimmende Mengen	75
6.1.2	Hermite-Interpolation	80
6.2	Triangulierungen mit semisingulären Fillpunkten	83
6.2.1	Minimal bestimmende Mengen	83
6.2.2	Hermite-Interpolation	88
6.3	Numerische Ergebnisse	90
7	Der Splineraum $S_q^1(\Delta)$, $q \geq 5$	95
7.1	Minimal bestimmende Mengen	97
7.2	Hermite-Interpolation	101
7.3	Lagrange-Interpolation	103
8	Minimal bestimmende Mengen von $S_q^2(\Delta)$ auf Kegeln	110
8.1	Minimal bestimmende Mengen von $S_q^2(\Delta)$ auf Teilmengen von $\mathcal{B}_q(K)$	114
8.1.1	C^2 -Mengen um einen Eckpunkt	117
8.1.2	C^2 -Mengen entlang einer Kante	120
8.1.3	C^2 -Mengen um einen Eckpunkt für Clough-Tochter-Dreiecke	123
8.2	Minimal bestimmende Mengen von $S_q^2(\Delta)$ auf Kegeln, $q = 5, 6$	129
8.3	Minimal bestimmende Mengen von $S_q^2(\Delta)$ auf Kegeln, $q \geq 7$	136
9	Minimal bestimmende Mengen von $S_q^2(\Delta)$ auf Zellen	141
9.1	Standardzellen innerer Eckpunkte	142
9.2	Standardzelle von Randpunkten	149
10	Der Splineraum $S_q^2(\Delta)$, $q = 5, 6$	153
10.1	Minimal bestimmende Mengen	155
10.2	Hermite-Interpolation	157
10.3	Lagrange-Interpolation	160
11	Der Splineraum $S_7^2(\Delta)$	167

11.1 Minimal bestimmende Mengen	168
11.2 Hermite-Interpolation	172
12 Der Splineraum $S_q^2(\Delta)$, $q \geq 8$	176
12.1 Minimal bestimmende Mengen	177
12.2 Hermite-Interpolation	183
Literaturverzeichnis	187

Kapitel 1

Einleitung

Das Hauptziel der vorliegenden Dissertation ist die Beschreibung allgemeiner Basen bivariater Splines und darauf aufbauend die Entwicklung von Algorithmen zur Konstruktion von allgemeinen Interpolationsmengen für bivariate Splines. Diese Splines in zwei Variablen sind auf Triangulierungen Δ eines Gebiets Ω in der Ebene definiert. Für gegebene $r, q \in \mathbb{N}$ ist der Raum der bivariaten Splines vom Grad q und Differenzierbarkeitsordnung r definiert durch

$$S_q^r(\Delta) := \{s \in C^r(\Omega) : s|_T \in \tilde{\Pi}_q, T \in \Delta\},$$

wobei $\tilde{\Pi}_q = \text{span}\{x^i y^j : 0 \leq i + j \leq q\}$ den Raum der bivariaten Polynome vom Grad q bezeichnet. Das Lagrange-Interpolationsproblem für bivariate Splines besteht darin, eine Punktmenge $\{z_1, \dots, z_d\} \subset \Omega$ zu konstruieren, wobei $d = \dim S_q^r(\Delta)$ gilt, so dass für jede stetige Funktion f auf Ω ein eindeutig bestimmter Spline $s_f \in S_q^r(\Delta)$ existiert, der die folgenden Lagrange-Interpolationsbedingungen erfüllt:

$$s_f(z_i) = f(z_i), \quad i = 1, \dots, d.$$

Eine solche Menge $\{z_1, \dots, z_d\}$ heißt Lagrange-Interpolationsmenge. Betrachten wir nicht nur die Funktionswerte von f , sondern auch partielle Ableitungen von f , so sprechen wir von Hermite-Interpolationsbedingungen bzw. von Hermite-Interpolationsmengen. Interpolationsmethoden für bivariate Splines bilden eine wichtige Grundlage für die genaue Konstruktion und Rekonstruktion von Oberflächen in Anwendungsgebieten wie beispielsweise der industriellen Fertigung, Medizin oder Geologie.

Während auf dem Gebiet der univariaten Splines zahlreiche vollständige Methoden entwickelt wurden, sind eine Reihe fundamentaler und schwieriger Probleme für bivariate Splines trotz großer Fortschritte in den letzten Jahren derzeit noch ungelöst. Dies betrifft insbesondere die Interpolation mit Splineräumen auf Triangulierungen und resultiert

aus der komplexen Struktur dieser Räume. Noch 1988 schrieb Chui [10] (S.129 und 136) in seinem Buch über „Multivariate Splines“: „[...], the subject of multivariate Lagrange interpolation from $S_q^r(\Delta)$ is very much underdeveloped“ und „Lagrange interpolation by multivariate splines , [...], a very important research area that requires new ideas and techniques for any direction of development“.

Die ersten Lagrange-Interpolationsmethoden wurden für quadratische Splineräume auf gleichmäßigen Triangulierungen von Sha [60], Chui & He [11] und Rießinger [53] entwickelt. Außerdem wurde Hermite-Interpolation mit kubischen Splineräumen auf gleichmäßigen Triangulierungen von Sha [61] und Jeeawock-Zedek [31] untersucht. Erst in den letzten Jahren wurden allgemeine Lagrange- und Hermite-Interpolationsmethoden für Splineräume $S_q^r(\Delta)$ auf gleichmäßigen Triangulierungen von Nürnberger & Rießinger [47], Nürnberger [45] und Nürnberger & Walz [48] angegeben.

In jüngster Zeit entwickelten Davydov & Nürnberger [18] und Nürnberger & Zeilfelder [49, 50] Interpolationsmethoden für $S_q^1(\Delta)$, $q \geq 5$, für beliebige Triangulierungen bzw. für $S_q^r(\Delta)$, $q \geq 2r + 1$, $r = 1, 2$, für allgemeine Klassen von Triangulierungen. Quasi-Interpolationsmethoden für $S_4^1(\Delta)$ und $S_6^2(\Delta)$ wurden von Chui & Hong [12, 13] bzw. von Lai & Schumaker [37] angegeben. Der Fall $S_q^r(\Delta)$, $q \geq 3r + 2$, wurde von Chui, Hong & Jia [15], Chui & Lai [14], de Boor & Höllig [8], Lai & Schumaker [38] und von Davydov, Nürnberger & Zeilfelder [21] untersucht.

Die Literatur zeigt, dass für gegebenen Grad q und gegebene Differenzierbarkeitsordnung r nur spezielle Interpolationsmengen für $S_q^r(\Delta)$ angegeben werden. Im Allgemeinen basieren diese Interpolationsmengen auf der Konstruktion von speziellen minimal bestimmenden Mengen von $S_q^r(\Delta)$. Sind die Polynomstücke eines Splines auf jedem Dreieck T der Triangulierung Δ in der Bernstein-Bézier-Darstellung

$$p(x, y) = \sum_{i+j+k=q} a_{i,j,k} \frac{q!}{i!j!k!} \phi_1(x, y)^i \phi_2(x, y)^j \phi_3(x, y)^k, \quad (x, y) \in T,$$

gegeben, dann ist eine minimal bestimmende Menge von $S_q^r(\Delta)$ grob gesprochen eine Menge von Basis-Koeffizienten $a_{i,j,k}$, die einen Spline aus $S_q^r(\Delta)$ eindeutig festlegen. Genauer gesagt, definiert man für jedes Dreieck $T \in \Delta$ Bernstein-Bézier-Punkte

$$P_{i,j,k} := \frac{iv_1 + jv_2 + kv_3}{q}, \quad i + j + k = q,$$

wobei v_1, v_2, v_3 die Eckpunkte von T bezeichnen, dann besteht eine minimal bestimmende Menge von $S_q^r(\Delta)$ aus Bernstein-Bézier-Punkten, die mittels eines Funktionals mit den zugehörigen Basis-Koeffizienten identifiziert werden können.

Die vorliegende Arbeit ist im Einzelnen wie folgt aufgebaut. In Kapitel 2 beschreiben wir die Grundlagen bivariater Splines. Wir gehen ferner auf die Bernstein-Bézier-Methoden

ein, die von Bézier [4], de Boor [7], de Casteljau [9] und anderen entwickelt wurden. Diese Methoden ermöglichen insbesondere eine effiziente Berechnung der Polynomstücke eines bivariaten Splines. Anschließend stellen wir die fundamentalen Relationen zwischen den Basis-Koeffizienten und den partiellen Ableitungen eines Splines von Farin [23] und de Boor [7] dar, mittels derer sich Hermite-Interpolationsbedingungen für $S_q^r(\Delta)$ direkt aus den minimal bestimmenden Mengen ergeben. Ferner geben wir die allgemeine untere und obere Schranke für die Dimension bivariater Splines von Schumaker [56, 58] sowie die Formel von Schumaker [59] für die Dimension von $S_q^r(\Delta)$ auf einer Zelle, d. h. auf der Vereinigung aller Dreiecke mit einem gemeinsamen Eckpunkt, an.

Als Grundlage für die Konstruktion von Interpolationsmengen für $S_q^r(\Delta)$, $r = 1, 2$, für allgemeine Klassen von Triangulierungen im Fall $q < 3r + 2$ und für beliebige Triangulierungen für $q \geq 3r + 2$ entwickeln wir in Kapitel 3 Algorithmen zur schrittweisen Konstruktion von Triangulierungen. Als Grundbausteine treten dabei Zellen und Kegel auf. Unter Kegeln verstehen wir Teiltriangulierungen einer Zelle, die aus (mindestens zwei) aufeinander folgenden Dreiecken besteht (vgl. Abb. 1.1). Wir beschreiben zunächst einen Algorithmus zur Konstruktion beliebiger Triangulierungen. Neben Kegeln und Zellen verwenden wir dabei auch einzelne Dreiecke, so genannte Fills, als Bausteine, die an einer beliebigen Stelle an die bereits konstruierte Teiltriangulierung angehängt werden können. Anschließend geben wir zwei weitere Algorithmen zur Konstruktion allgemeiner Klassen von Triangulierungen an, wobei in dem einen Fall nur Kegel und in dem anderen Fall Kegel und Fills in einer festgelegten Reihenfolge zur bereits konstruierten Teiltriangulierung hinzugefügt werden. Ferner legen wir auf allen diesen Triangulierungen eine Ordnung fest, in der eine gegebene Triangulierung zu durchlaufen ist.

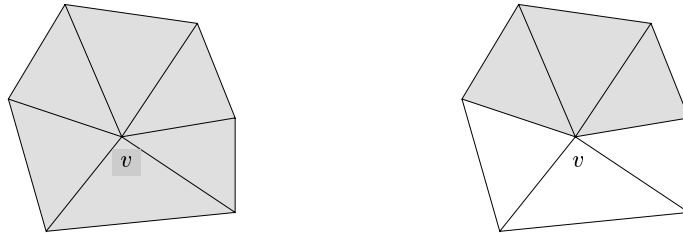


Abb. 1.1: Die grauen Dreiecke bilden die Zelle eines Eckpunkts v (links) bzw. einen Kegel mit dem Scheitelpunkt v (rechts).

In Kapitel 4 geben wir eine vollständige Charakterisierung aller minimal bestimmender Mengen von $S_q^1(\Delta)$ für $q \geq 3$ auf beliebigen Kegeln an. Aufgrund der komplexen Gesamtstruktur, die aus den durch die Differenzierbarkeitsbedingungen gegebenen Relationen zwischen den Basis-Koeffizienten der einzelnen Polynomstücke resultiert, bedarf dieses Ergebnis eines umfangreichen Beweises. Basierend auf den Resultaten für Kegel erhal-

ten wir allgemeine Klassen minimal bestimmender Mengen von $S_q^1(\Delta)$ für Zellen. Daraus folgt das Ergebnis von Schumaker [59], der eine spezielle minimal bestimmende Menge von $S_q^1(\Delta)$ auf beliebigen Zellen konstruierte. Im Fall singulärer Eckpunkte erhalten wir sogar eine vollständige Beschreibung der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^1(\Delta)$ auf der zugehörigen Zelle.

In Kapitel 5 betrachten wir den Splineraum $S_3^1(\Delta)$, der für die Splinetheorie von besonderem Interesse ist. Die Dimension von $S_3^1(\Delta)$ für beliebige Triangulierungen ist derzeit noch nicht bekannt. Unter Verwendung der Ergebnisse aus Kapitel 4 konstruieren wir allgemeine Klassen minimal bestimmender Mengen von $S_3^1(\Delta)$ für Triangulierungen, die durch schrittweises Anhängen beliebiger Kegel erzeugt werden. Bei gewissen kritischen Konstellationen, den so genannten Semisingularitäten (d. h. die inneren Kanten des Kegels sind alle degeneriert), schränken wir dazu die Wahlmöglichkeiten einer minimal bestimmenden Menge auf einem Kegel ein. Basierend auf diesen Resultaten erhalten wir direkt Hermite- und Lagrange-Interpolationsmengen für $S_3^1(\Delta)$. Davydov, Nürnberger & Zeilfelder [20] konstruierten für die Klasse der so genannten Nested-Polygons-Triangulierungen eine spezielle minimal bestimmende Menge sowie Interpolationsmengen für $S_3^1(\Delta)$. Im Gegensatz zu den von uns betrachteten Triangulierungen dürfen in Nested-Polygons-Triangulierungen Semisingularitäten jedoch nicht beliebig oft auftreten.

Der Splineraum $S_4^1(\Delta)$ wird in Kapitel 6 behandelt. Alfeld, Piper & Schumaker [2] konstruierten für beliebige Triangulierungen eine spezielle minimal bestimmende Menge von $S_4^1(\Delta)$ unter Verwendung grafentheoretischer Konzepte. Da diese Methode auf globalen Argumenten basiert, können diese Mengen nicht direkt in Hermite-Interpolationsbedingungen umgesetzt werden. Wir betrachten zunächst beliebige Triangulierungen mit Eckpunkten vom Grad ≤ 7 . Durch einen direkten Ansatz erhalten wir aus den Resultaten aus Kapitel 4 in Kombination mit dem Durchlauf durch eine solche Triangulierung große Klassen minimal bestimmender Mengen von $S_4^1(\Delta)$. Ferner liefert uns die Beschreibung dieser Mengen direkt allgemeine Hermite-Interpolationsschemas für $S_4^1(\Delta)$, wobei für fast alle Eckpunkte der Triangulierung sowohl der Funktionswert als auch die partiellen Ableitungen ersten Grades interpoliert werden. Die von Davydov & Nürnberger [18] konstruierten Hermite-Interpolationsmengen für $S_4^1(\Delta)$, bei der gewisse Semisingularitäten ausgeschlossen sind, sind hierbei enthalten. Numerische Tests zeigen, dass unsere Interpolationsmethode sowohl für uniforme Triangulierungen als auch für Delaunay-Triangulierungen aus zufällig verteilten Punkten fast-optimale Approximationsordnung besitzt. Wir betrachten ferner beliebige Triangulierungen, wobei wir in einzelnen Fällen gewisse Bedingungen an einen Eckpunkt stellen. Es gelingt uns, für diese Triangulierungen ebenfalls allgemeine Klassen minimal bestimmender Mengen zu konstruieren. Aus der Beschreibung der minimal bestimmenden Mengen ergibt sich wiederum eine allgemeine Klasse von Hermite-Interpolationsmengen, wobei in diesem Fall für alle Eckpunkte der Triangulierung der Funktionswert und die

Ableitungen ersten Grades interpoliert werden.

In Kapitel 7 beschreiben wir aufbauend auf unseren Ergebnissen aus Kapitel 3 und 4 allgemeine Klassen minimal bestimmender Mengen von $S_q^1(\Delta)$, $q \geq 5$, für beliebige Triangulierungen. Morgan & Scott [42] und Davydov [17] konstruierten eine spezielle Hermite-Interpolationsmenge für $S_q^1(\Delta)$, $q \geq 5$, für beliebige Triangulierungen. Aus unserer Beschreibung minimal bestimmender Mengen von $S_q^1(\Delta)$ erhalten wir direkt eine große Klasse weiterer Hermite-Interpolationsmengen für beliebige Triangulierungen. Um Lagrange-Interpolationsmethoden für $S_q^1(\Delta)$, $q \geq 5$, zu konstruieren, ist es notwendig zusätzliche Methoden zu entwickeln. Wir wählen Lagrange-Interpolationspunkte auf Kanten und Geradensegmenten und erreichen somit für jedes Dreieck eine Reduktion des Polynomgrades. Auf diese Weise erhalten wir ein allgemeines Lagrange-Interpolationsschema für $S_q^1(\Delta)$, $q \geq 5$, für beliebige Triangulierungen. Daraus folgt das Resultat von Davydov & Nürnberger [18], die eine spezielle Lagrange-Interpolationsmenge für eine Klasse von Triangulierungen beschreiben.

In Kapitel 8 betrachten wir den Splineraum $S_q^2(\Delta)$, $q \geq 5$, auf beliebigen Kegeln. Im Vergleich zum Fall $S_q^1(\Delta)$ handelt es sich hierbei um ein wesentlich schwierigeres Problem, da die Bézier-Koeffizienten eines C^2 -Splines in einem noch komplexeren Zusammenhang stehen. Neben Semisingularitäten treten weitere kritische geometrische Konstellationen auf. In den Fällen $q = 5$ und $q = 6$ werden wir diese kritischen Situationen auflösen, indem wir einzelne Dreiecke des Kegels unterteilen. Für $q \geq 7$ setzen wir voraus, dass in der Nähe der Eckpunkte des Kegels die Punkte für eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta)$ bereits gewählt sind. Somit können wir die kritischen Situationen isolieren, und eine Modifizierung des Kegels wird überflüssig. Durch die genaue Analyse der Relationen zwischen den Bézier-Koeffizienten eines Splines gelingt es uns, unter den obigen Annahmen allgemeine Klassen minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta)$, $q \geq 5$, auf beliebigen Kegeln zu konstruieren.

Ausgehend von den Ergebnissen in Kapitel 8 beschreiben wir in Kapitel 9 große Klassen minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta)$ auf beliebigen Zellen. Anders als bei Kegeln unterteilen wir dabei jedoch für $q \leq 6$ keine Dreiecke der Zelle. Schumaker [59] konstruierte eine spezielle minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta)$ auf beliebigen Zellen, die in der von uns beschriebenen Klasse enthalten ist.

In Kapitel 10 beschäftigen wir uns mit dem Splineraum $S_q^2(\Delta)$, $q = 5, 6$. Nürnberger & Zeilfelder [49] beschrieben für $q \leq 6$ eine minimal bestimmende Menge und zugehörige Interpolationsschemas für $S_q^2(\Delta)$ für Triangulierungen, die induktiv durch Anhängen von Kegeln an ein Startdreieck erzeugt werden, wobei jedoch Semisingularitäten ausgeschlossen wurden. Wir betrachten die Klasse der Triangulierungen, die durch schrittweises Hinzufügen beliebiger Kegel und Zellen zu einem gegebenen Startdreieck erzeugt werden.

Basierend auf den Resultaten aus Kapitel 8 und Kapitel 9 erhalten wir für diese Triangulierungen eine allgemeine Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta)$. Unter Verwendung der elementaren Beziehungen zwischen den Basis-Koeffizienten und den partiellen Ableitungen eines Splines können wir somit direkt eine große Klasse von Hermite-Interpolationsbedingungen für $S_q^2(\Delta)$, $q \leq 6$, angeben. Ferner gelingt es uns, allgemeine Lagrange-Interpolationsmengen für $S_5^2(\Delta)$ zu konstruieren, indem wir die Methode der Reduktion des Polynomgrades verwenden.

In Kapitel 11 konstruieren wir allgemeine Klassen minimal bestimmender Mengen von $S_7^2(\Delta)$ für beliebige Triangulierungen, wobei nur in Einzelfällen Dreiecke einer Triangulierung unterteilt werden. Im Gegensatz zu Nürnberger & Zeilfelder [49], die für Triangulierungen, die nur aus Kegeln aufgebaut werden, eine spezielle minimal bestimmende Menge angaben, berücksichtigen wir in unserer Methode auch die schwierigen Konstellationen der Semisingularitäten. Wir gehen dazu nach einer 2-Schritt-Methode vor. Wir bestimmen zuerst die Punkte der minimal bestimmenden Mengen in der Nähe aller Eckpunkte der Triangulierung. Anschließend durchlaufen wir die Triangulierung und wählen weitere Punkte. Aus den so konstruierten Klassen minimal bestimmender Mengen ergeben sich direkt allgemeine Hermite-Interpolationsschemas für $S_7^2(\Delta)$.

In Kapitel 12 betrachten wir den Splineraum $S_q^2(\Delta)$, $q \geq 8$, für beliebige Triangulierungen. Chui & Lai [14] und Lai & Schumaker [37] konstruierten eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta)$, $q \geq 8$. Wir konstruieren für beliebige Triangulierungen eine allgemeine Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta)$, $q \geq 8$. Durch eine geeignete Wahl der Bernstein-Bézier-Punkte gelingt es uns hierbei, Unterteilungen von Dreiecken zu vermeiden. Mit der Charakterisierung allgemeiner minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta)$ auf beliebigen Kegeln und Zellen ergibt sich somit für $q \geq 8$ direkt eine große Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta)$. Davydov, Nürnberger & Zeilfelder [21] gaben ein Hermite-Birkhoff-Interpolationsschema für $S_q^2(\Delta)$, $q \geq 8$, an. Ausgehend von unseren Ergebnissen konstruieren wir erstmalig ein Hermite-Interpolationsschema für $S_q^2(\Delta)$, $q \geq 8$, für beliebige Triangulierungen.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Günther Nürnberger für die Anregung zu dieser Arbeit und für die Betreuung während ihrer Entstehung. Des Weiteren möchte ich an dieser Stelle Herrn Dr. Frank Zeilfelder für seine Unterstützung und seine stets vorhandene konstruktive Gesprächsbereitschaft danken.

Kapitel 2

Bivariate Splines

Im Folgenden geben wir einen Überblick über die Grundlagen bivariater Splines. Wir beginnen dieses Kapitel mit der Definition bivariater Splines auf Triangulierungen und gehen ferner auf das Interpolationsproblem für diese Räume ein. Anschließend beschreiben wir Bernstein-Bézier-Methoden, die eine besonders effiziente Berechnung bivariater Splines ermöglichen. Wir beenden das Kapitel mit der Darstellung der bekannten Resultate bzgl. der Dimension bivariater Splineräume.

2.1 Der Splineraum $S_q^r(\Delta)$

Interpolation ist eine Standardmethode zur Approximation von Funktionen oder gegebener Daten. Wir definieren im Folgenden bivariate Splineräume, die zur Konstruktion glatter Oberflächen, welche Funktionen oder Daten interpolieren, verwendet werden.

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ stets ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit nicht leerem Inneren, dessen Rand aus einem geschlossenen Polygonzug besteht. Bivariate Splines sind bzgl. Triangulierungen eines solchen Gebiets Ω definiert.

Eine *Triangulierung* Δ eines Gebiets Ω ist eine Menge abgeschlossener Dreiecke $T^{[l]}$, $l = 1, \dots, N$, so dass gilt

- (i) $\Omega = \cup_{l=1}^N T^{[l]}$ und
- (ii) für $l, m \in \{1, \dots, N\}$ mit $l \neq m$ ist $T^{[l]} \cap T^{[m]}$ entweder leer, eine gemeinsame Kante oder ein gemeinsamer Eckpunkt.

Abbildung 2.1 zeigt ein Beispiel einer Triangulierung.

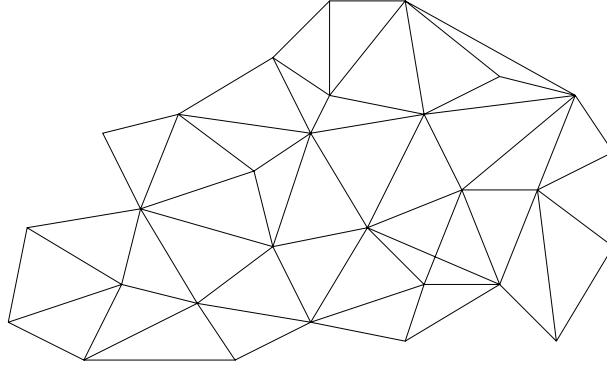


Abb. 2.1: Eine Triangulierung Δ eines Gebiets Ω im \mathbb{R}^2 .

Ist Δ eine Triangulierung von Ω , so gelten folgende Bezeichnungen:

- E_I = Menge der inneren Kanten,
- E_B = Menge der auf dem Rand von Δ liegenden Kanten,
- E = Menge aller Kanten,
- V_I = Menge der inneren Eckpunkte,
- V_B = Menge der auf dem Rand von Δ liegenden Eckpunkte,
- V = Menge aller Eckpunkte,
- N = Anzahl der Dreiecke von Δ .

Ferner sei für jede Menge M mit $|M|$ die Anzahl ihrer Elemente bezeichnet. Für jede beliebige Triangulierung gelten die folgenden Euler-Formeln:

$$|E_I| = 3|V_I| + |V_B| - 3, \quad (2.1)$$

$$|E_B| = |V_B|. \quad (2.2)$$

Wir definieren nun den Raum der bivariaten Splines. Diese Räume sind natürliche Verallgemeinerungen der klassischen univariaten Splines, d. h. Splines in einer Variablen (vgl. de Boor [6], Nürnberger [44] und Schumaker [57]).

Für $q, r \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq r < q$, ist der Raum der r -mal stetig differenzierbaren Splines in zwei Variablen vom Grad q hinsichtlich der Triangulierung Δ definiert durch

$$S_q^r(\Delta) := \{s \in C^r(\Omega) : s|_{T[n]} \in \tilde{\Pi}_q, n = 1, \dots, N\},$$

wobei $C^r(\Omega)$ der Raum aller r -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω ist. Ferner bezeichnet

$$\tilde{\Pi}_q := \text{span} \{x^i y^j : 0 \leq i + j \leq q\}$$

den $\binom{q+2}{2}$ -dimensionalen Raum der *bivariaten Polynome* vom totalen Grad q .

Betrachten wir univariate Splines, dann erhalten wir mit den Schoenberg-Whitney-Bedingungen (vgl. Schoenberg & Whitney [55] und Karlin & Ziegler [32]) eine vollständige Charakterisierung der Interpolationsmengen für univariate Splines. Zwischen der Interpolation mit bivariaten Splines und der Interpolation mit univariaten Splines besteht jedoch ein wesentlicher Unterschied, da selbst im einfachsten Fall der stückweise stetigen Splines die Schoenberg-Whitney-Bedingungen nicht verallgemeinert werden können (Chui [10], S. 136).

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit dem Problem der Konstruktion von *Interpolationsmengen* für bivariate Splineräume $S_q^r(\Delta)$. Eine Menge $\{z_1, \dots, z_d\} \subset \Omega$ mit $d = \dim S_q^r(\Delta)$ bezeichnen wir als *Lagrange-Interpolationsmenge* für $S_q^r(\Delta)$, wenn für jede Funktion $f \in C(\Omega)$ ein eindeutig bestimmter Spline $s \in S_q^r(\Delta)$ existiert, so dass

$$s(z_i) = f(z_i), \quad i = 1, \dots, d,$$

gilt. Falls ferner partielle Ableitungen einer genügend oft differenzierbaren Funktion f miteinbezogen werden und die Anzahl der Hermite-Bedingungen gleich d ist, dann sprechen wir von *Hermite-Interpolationsmengen* für $S_q^r(\Delta)$. Abbildung 2.2 zeigt bivariate Splines aus $S_5^1(\Delta)$, die nach der Hermite-Interpolationsmethode von Morgan & Scott [42] berechnet wurden.

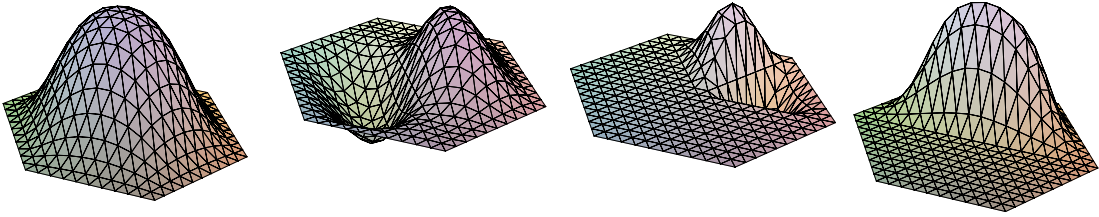


Abb. 2.2: Beispiele für einen bivariaten Spline aus $S_5^1(\Delta)$.

Für eine Lagrange-Interpolationsmenge $\{z_1, \dots, z_d\} \subset \Omega$ für $S_q^r(\Delta)$ sind die *Fundamentalsplines* $s_i \in S_q^r(\Delta)$, $i = 1, \dots, d$, gegeben durch

$$s_i(z_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad j = 1, \dots, d.$$

Der interpolatorische Spline s hat dann die folgende Darstellung:

$$s(z) = \sum_{i=1}^d f(z_i) s_i(z), \quad z \in \Omega.$$

Zur Beschreibung von Hermite-Interpolationsbedingungen verwenden wir die folgende Schreibweise. Für einen gegebenen Einheitsvektor \mathbf{r} bezeichnet $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}$ die Richtungsableitung

in Richtung von r . Richtungsableitungen höheren Grades bezeichnen wir mit $\frac{\partial^{\rho+\sigma} f}{\partial \rho r_1 \partial^\sigma r_2}$, wobei r_1 und r_2 nicht kollineare Einheitsvektoren sind.

In Anlehnung an Morgan & Scott [42] definieren wir ferner die *Kantenableitungen* einer Funktion. Es sei v ein Eckpunkt von $T \in \Delta$, und es seien e_1 und e_2 die beiden Kanten von T mit Eckpunkt v . Ist f genügend oft differenzierbar, dann setzen wir

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(v) := \frac{\partial f}{\partial r_i}(v), \quad i = 1, 2,$$

und für $\sigma, \rho \in \mathbb{N}$

$$\frac{\partial^{\rho+\sigma} f}{\partial \rho e_1 \partial^\sigma e_2}(v) := \frac{\partial^{\rho+\sigma} f}{\partial \rho r_1 \partial^\sigma r_2}(v),$$

wobei für $i = 1, 2$ r_i der Einheitsvektor in Richtung der Kante e_i ist, der von v wegzeigt. Ferner setzen wir in diesem Fall für $\omega \in \mathbb{N}$

$$D^\omega f(v) := \left(\frac{\partial^\omega f}{\partial^\omega e_1}(v), \frac{\partial^\omega f}{\partial^{\omega-1} e_1 \partial e_2}(v), \dots, \frac{\partial^\omega f}{\partial^\omega e_2}(v) \right). \quad (2.3)$$

2.2 Bernstein-Bézier-Techniken

Im Folgenden stellen wir verschiedene Bernstein-Bézier-Techniken dar, die aus dem Bereich des Computer Aided Geometric Design (CAGD) stammen. Für bivariate Splines spielen diese Techniken eine fundamentale Rolle, da sie einerseits eine effiziente Berechnung der Polynomstücke eines bivariaten Splines ermöglichen und andererseits die Analyse der komplexen Struktur bivariater Splines durch die Bernstein-Bézier-Darstellung der Polynomstücke vereinfachen.

Ist T ein Dreieck in der Ebene mit den Eckpunkten v_1, v_2, v_3 , so verwenden wir die Schreibweise $T = \Delta(v_1, v_2, v_3)$. Sei nun $T = \Delta(v_1, v_2, v_3)$ gegeben, dann existieren für ein beliebiges $v \in \mathbb{R}^2$ eindeutig bestimmte $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, mit

$$v = \sum_{i=1}^3 \lambda_i v_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1.$$

Wir nennen diese λ_i , $i = 1, 2, 3$, die *baryzentrischen Koordinaten* von v bzgl. T . Für das Dreieck T definieren wir die *baryzentrische Koordinatenfunktionen* $\phi_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\phi_i(v) = \lambda_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Die baryzentrischen Koordinatenfunktionen $\phi_i \in \tilde{\Pi}_1$, $i = 1, 2, 3$, sind eindeutig festgelegt durch die Beziehung

$$\phi_i(v_j) = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Abbildung 2.3 veranschaulicht die baryzentrischen Koordinatenfunktionen für ein gegebenes Dreieck $T = \Delta(v_1, v_2, v_3)$.

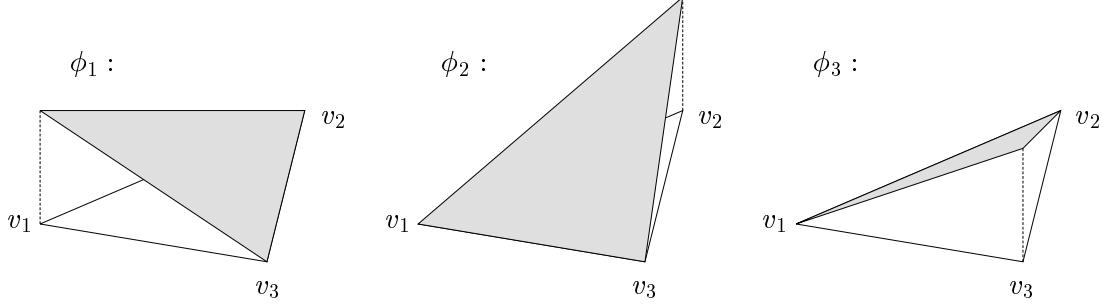


Abb. 2.3: Die baryzentrischen Koordinatenfunktionen $\phi_i \in \tilde{\Pi}_1$, $i = 1, 2, 3$.

Die *Bernstein-Bézier-Polynome* bzgl. eines Dreiecks T , die definiert sind durch

$$B_{i,j,k}^q = \frac{q!}{i!j!k!} \phi_1^i \phi_2^j \phi_3^k, \quad i + j + k = q,$$

bilden eine Basis von $\tilde{\Pi}_q$. Somit kann jedes Polynom $p \in \tilde{\Pi}_q$ eindeutig geschrieben werden als

$$p = \sum_{i+j+k=q} a_{i,j,k} B_{i,j,k}^q, \quad a_{i,j,k} \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Diese Darstellung von $p \in \tilde{\Pi}_q$ heißt *Bernstein-Bézier-Darstellung* (BB-Darstellung) von p bzgl. T . Die Basiskoeffizienten $a_{i,j,k}$ nennen wir *Bézier-Koeffizienten* von p .

Ist s ein bivariater Spline aus $S_q^0(\Delta)$, so ist s eingeschränkt auf ein Dreieck von Δ gegeben durch ein Polynom vom Grad $\leq q$. Die Polynome $p^{[l]} = s|_{T^{[l]}} \in \tilde{\Pi}_q$, $l = 1, \dots, N$, können somit wie folgt geschrieben werden:

$$p^{[l]} = \sum_{i+j+k=q} a_{i,j,k}^{[l]} B_{i,j,k}^q = \sum_{i+j+k=q} \frac{q!}{i!j!k!} a_{i,j,k}^{[l]} (\phi_1^{[l]})^i (\phi_2^{[l]})^j (\phi_3^{[l]})^k. \quad (2.5)$$

Für jedes Dreieck $T^{[l]} = \Delta(v_1^{[l]}, v_2^{[l]}, v_3^{[l]})$ definieren wir ferner *Bernstein-Bézier-Punkte* (BB-Punkte):

$$P_{i,j,k}^{[l]} := \frac{i}{q} v_1^{[l]} + \frac{j}{q} v_2^{[l]} + \frac{k}{q} v_3^{[l]}.$$

Dann bezeichne $\mathcal{B}_q(\Delta)$ die Menge aller BB-Punkte auf Δ .

Ist $s \in S_q^0(\Delta)$ in der Bernstein-Bézier-Darstellung (2.5) gegeben, dann bezeichnen wir die Abbildung $b_s : \mathcal{B}_q(\Delta) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$b_s(P_{i,j,k}^{[l]}) = a_{i,j,k}^{[l]}, \quad i + j + k = q, \quad l = 1, \dots, N,$$

als den *B-Netz-Repräsentanten* von s bzgl. Δ . Die Menge der Verbindungsgeraden zwischen benachbarten Punkten der Menge

$$\{(P_{i,j,k}^{[l]}, a_{i,j,k}^{[l]}) : i + j + k = q, l = 1, \dots, N\}$$

bezeichnen wir als *Bernstein-Bézier-Netz* oder *Kontrollnetz* von s auf Δ bzgl. q . Abbildung 2.4 zeigt das Bernstein-Bézier-Netz eines bivariaten Splines auf einem Dreieck für $q = 4$.

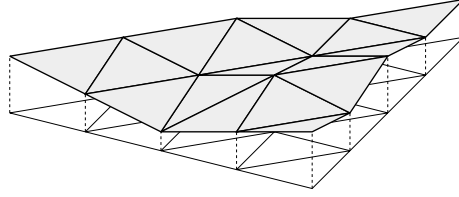


Abb. 2.4: Bernstein-Bézier-Netz von $s \in S_4^0(\Delta)$ auf einem Dreieck.

Die Darstellung (2.5) wird insbesondere dazu verwendet, um die C^r -Stetigkeitsbedingungen entlang einer inneren Kante von Δ für einen bivariaten Spline in handhabbare Bedingungen zu überführen. Farin [23] und de Boor [7] zeigten, dass man aus der Übereinstimmung der Richtungsableitungen eines Splines auf zwei benachbarten Dreiecken entlang der gemeinsamen Kante die folgende Charakterisierung der C^r -Stetigkeitsbedingungen erhält.

Theorem 2.1. *Es sei $\Delta = T^{[1]} \cup T^{[2]}$ mit $T^{[1]} = \Delta(v_1, v_2, v_3)$ und $T^{[2]} = \Delta(v_1, v_2, v_4)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $s \in S_q^r(\Delta)$.

(ii) Für alle $k \in \{0, \dots, r\}$ gilt:

$$a_{i,j,k}^{[2]} = \sum_{\lambda+\mu+\nu=k} a_{i+\lambda,j+\mu,\nu}^{[1]} B_{\lambda,\mu,\nu}^{k[1]}(v_4), \quad i + j = q - k. \quad (2.6)$$

Abbildung 2.5 veranschaulicht die geometrische Deutung der C^r -Stetigkeitsbedingungen aus Theorem 2.1 für den Fall $r = 1$. Für die Koeffizienten in (2.6) müssen die zugehörigen Punkte $(P_{i,j,k}^{[l]}, a_{i,j,k}^{[l]})$ in einer Ebene liegen. Ist die Kante $e = [v_1, v_2]$ degeneriert bzgl. v_1 , d. h. sind die beiden Kanten $[v_1, v_3]$ und $[v_1, v_4]$ kollinear, dann lassen sich die C^1 -Stetigkeitsbedingungen so interpretieren, dass die Ebene zu einer Geraden degeneriert, auf der die drei entsprechenden Punkte $(P_{i,j,k}^{[l]}, a_{i,j,k}^{[l]})$ liegen müssen.

Wir stellen im Folgenden die fundamentalen Beziehungen zwischen den partiellen Ableitungen eines Polynoms an einem Eckpunkt und dessen Bézier-Koeffizienten dar (vgl. de

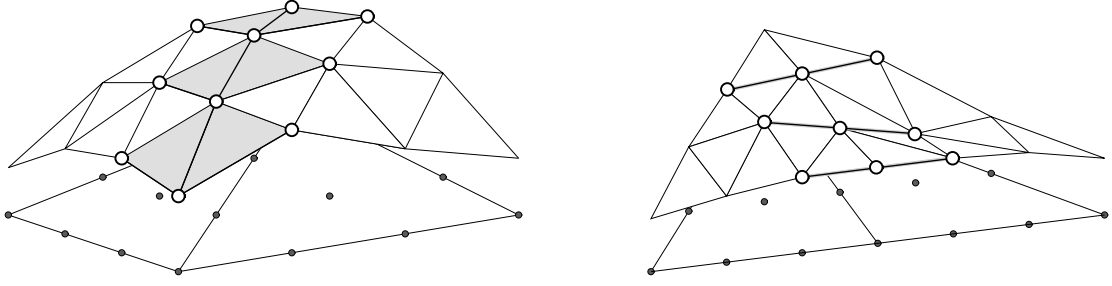


Abb. 2.5: Die C^1 -Stetigkeitsbedingungen im nicht degenerierten Fall (links) und im degenerierten Fall (rechts): Gewisse Punkte $(P_{i,j,k}^{[l]}, a_{i,j,k}^{[l]})$ müssen in einer Ebene bzw. auf einer Geraden liegen.

Boor [7], Farin [23], Nürnberger & Zeilfelder [49]). Sei $p \in \tilde{\Pi}_q$ auf $T = \Delta(v_1, v_2, v_3)$ in der BB-Darstellung (2.5) gegeben. Ferner seien r_1, r_2 die Einheitsvektoren in Richtung der Kante $[v_1, v_2]$ bzw. $[v_1, v_3]$. Dann gilt für alle $0 \leq \rho + \sigma \leq q$

$$\frac{\partial^{\rho+\sigma} p}{\partial \rho_{r_1} \partial \sigma_{r_2}}(x, y) = \sum_{i+j+k=q} a_{i,j,k} \frac{q!}{i!j!k!} \frac{\partial^{\rho+\sigma} (\phi_1^i \phi_2^j \phi_3^k)}{\partial \rho_{r_1} \partial \sigma_{r_2}}(x, y), \quad (x, y) \in T.$$

Da $\frac{\partial^\rho \phi_3^k}{\partial \rho_{r_1}} = 0$ für $\rho \geq 1$ gilt, folgt mit der Leibnizregel

$$\frac{\partial^\rho (\phi_1^i \phi_2^j \phi_3^k)}{\partial \rho_{r_1}} = \sum_{\mu=0}^{\rho} \binom{\rho}{\mu} \left(\frac{\partial^{\rho-\mu} \phi_1^i}{\partial \rho_{r_1}^{\mu}} \right) \left(\frac{\partial^\mu \phi_2^j}{\partial \rho_{r_1}^\mu} \right) \phi_3^k, \quad i + j + k = q.$$

Da $\frac{\partial^\sigma \phi_2^j}{\partial \sigma_{r_2}} = 0$ für $\sigma \geq 1$ gilt, erhalten wir analog für $i + j + k = q$

$$\frac{\partial^{\rho+\sigma} (\phi_1^i \phi_2^j \phi_3^k)}{\partial \rho_{r_1} \partial \sigma_{r_2}} = \sum_{\mu=0}^{\rho} \sum_{\nu=0}^{\sigma} \binom{\rho}{\mu} \binom{\sigma}{\nu} \left(\frac{\partial^{\rho+\sigma-\mu-\nu} \phi_1^i}{\partial \rho_{r_1}^{\mu} \partial \sigma_{r_2}^{\nu}} \right) \left(\frac{\partial^\mu \phi_2^j}{\partial \rho_{r_1}^\mu} \right) \left(\frac{\partial^\nu \phi_3^k}{\partial \sigma_{r_2}^\nu} \right).$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\rho+\sigma} (\phi_1^i \phi_2^j \phi_3^k)}{\partial \rho_{r_1} \partial \sigma_{r_2}} &= \sum_{\mu=0}^{\rho} \sum_{\nu=0}^{\sigma} \binom{\rho}{\mu} \binom{\sigma}{\nu} \frac{i!j!k!}{i_1!j_1!k_1!} \phi_1^{i_1} \phi_2^{j_1} \phi_3^{k_1} \\ &\quad \cdot \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial r_1} \right)^{\rho-\mu} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial r_2} \right)^{\sigma-\nu} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial r_1} \right)^\mu \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial r_2} \right)^\nu, \end{aligned}$$

wobei $i_1 = i - \rho - \sigma + \mu + \nu$, $j_1 = j - \mu$ und $k_1 = k - \nu$ gilt.

Da $\phi_\mu(v_1) = \delta_{1,\mu}$, $\mu = 1, 2, 3$, gilt, erhalten wir für $j \in \{0, \dots, \rho\}$ und $k \in \{0, \dots, \sigma\}$

$$\frac{\partial^{\rho+\sigma} (\phi_1^i \phi_2^j \phi_3^k)}{\partial \rho_{r_1} \partial \sigma_{r_2}}(v_1) = \binom{\rho}{j} \binom{\sigma}{k} \frac{i!j!k!}{(q - \rho - \sigma)!} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial r_1} \right)^{\rho-j} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial r_2} \right)^{\sigma-k} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial r_1} \right)^j \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial r_2} \right)^k.$$

Ferner gilt für $j > \rho$ oder $k > \sigma$, $i + j + k = q$,

$$\frac{\partial^{\rho+\sigma}(\phi_1^i \phi_2^j \phi_3^k)}{\partial^{\rho} r_1 \partial^{\sigma} r_2}(v_1) = 0.$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\rho+\sigma} p}{\partial^{\rho} r_1 \partial^{\sigma} r_2}(v_1) &= \frac{q!}{(q - \rho - \sigma)!} \sum_{j=0}^{\rho} \sum_{k=0}^{\sigma} \binom{\rho}{j} \binom{\sigma}{k} a_{q-j-k,j,k} \\ &\quad \cdot \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial r_1} \right)^{\rho-j} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial r_2} \right)^{\sigma-k} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial r_1} \right)^j \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial r_2} \right)^k. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Für ρ, σ mit $\rho + \sigma \in \{0, \dots, q\}$ folgt daraus unmittelbar

$$\begin{aligned} a_{q-\rho-\sigma,\rho,\sigma} &= \frac{(q - \rho - \sigma)!}{q!} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial r_1} \right)^{-\rho} \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial r_2} \right)^{-\sigma} \frac{\partial^{\rho+\sigma} p}{\partial^{\rho} r_1 \partial^{\sigma} r_2}(v_1) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{\rho-1} \binom{\rho}{j} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial r_1} \right)^{\rho-j} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial r_1} \right)^{j-\rho} a_{q-j-\sigma,j,\sigma} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{\rho} \sum_{k=0}^{\sigma-1} \binom{\rho}{j} \binom{\sigma}{k} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial r_1} \right)^{\rho-j} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial r_1} \right)^{j-\rho} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial r_2} \right)^{\sigma-k} \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial r_2} \right)^{k-\sigma} a_{q-j-k,j,k}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Mit (2.7) und (2.8) erhalten wir per Induktion direkt das folgende Theorem.

Theorem 2.2. *Die Bézier-Koeffizienten*

$$a_{q-j-k,j,k}, \quad j = 0, \dots, \rho, \quad k = 0, \dots, \sigma,$$

eines Polynoms $p \in \tilde{\Pi}_q$ in der Darstellung (2.4) sind genau dann eindeutig bestimmt, wenn die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^{j+k} p}{\partial^j r_1 \partial^k r_2}, \quad j = 0, \dots, \rho, \quad k = 0, \dots, \sigma,$$

eindeutig bestimmt sind.

2.3 Bestimmende Mengen und Dimension

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit den Resultaten zur Dimension bivariater Splineräume auf beliebigen Triangulierungen. Diese Resultate spielen insbesondere bei der Konstruktion von Interpolationsmengen eine fundamentale Rolle. Im Gegensatz zur univariaten Splinetheorie ist die Bestimmung der Dimension von bivariaten Splineräumen $S_q^r(\Delta)$ ein nicht triviales Problem, falls $r \geq 1$ gilt. Strang [63] war der Erste, der die Frage stellte: Was ist die Dimension von $S_q^r(\Delta)$? Im Folgenden stellen wir die bekannten Ergebnisse zu diesem Problem dar. Wir beginnen mit der unteren Schranke für die Dimension, die 1979 von Schumaker [56] bewiesen wurde.

Theorem 2.3. Sei Δ eine beliebige Triangulierung. Für jeden inneren Eckpunkt v von Δ bezeichne e_v die Anzahl der Kanten an v mit paarweise verschiedener Steigung. Ferner sei

$$\sigma_v = \sum_{j=1}^{q-r} (r+j+1 - je_v)_+, \quad v \in V_I,$$

wobei $(x)_+ = \max\{0, x\}$. Dann gilt

$$\dim S_q^r(\Delta) \geq \binom{q+2}{2} + \binom{q-r+1}{2} |E_I| - \left(\binom{q+2}{2} - \binom{r+2}{2} \right) |V_I| + \sum_{v \in V_I} \sigma_v. \quad (2.9)$$

Eine Standardmethode zur exakten Bestimmung der Dimension eines gegebenen bivariaten Splineraums ist es, eine obere Schranke für die Dimension zu finden, so dass diese mit der unteren Schranke zusammenfällt. Schumaker [56] zeigte für beliebige Triangulierungen, dass die Dimension von jedem Splineraum mit Hilfe von bestimmenden Mengen nach oben beschränkt werden kann. Die Anzahl der Elemente einer bestimmenden Menge gibt dabei eine obere Schranke für die Dimension des Splineraums an.

Bestimmende Mengen werden durch lineare Funktionale beschrieben, die wie folgt definiert sind. Sei $s \in S_q^0(\Delta)$ in der BB-Darstellung (2.5) gegeben, dann ist für $P_{i,j,k}^{[l]} \in \mathcal{B}_q(\Delta)$ das lineare Funktional $\lambda_{P_{i,j,k}^{[l]}}$ auf S_q^0 definiert durch

$$\lambda_{P_{i,j,k}^{[l]}} s = a_{i,j,k}^{[l]}, \quad s \in S_q^0(\Delta).$$

Sind \mathcal{A} und \mathcal{P} Teilmengen von $\mathcal{B}_q(\Delta)$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$, dann ist \mathcal{A} genau dann eine *bestimmende Menge* von $S_q^r(\Delta)$ auf \mathcal{P} , wenn für alle $s \in S_q^r(\Delta)$ gilt:

$$\lambda_P s = 0 \quad \text{für alle } P \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \lambda_P s = 0 \quad \text{für alle } P \in \mathcal{P}.$$

\mathcal{A} ist eine *minimal bestimmende Menge* von $S_q^r(\Delta)$, falls es keine bestimmende Menge mit weniger Elementen gibt. Insbesondere gilt für den Fall $\mathcal{P} = \mathcal{B}_q(\Delta)$:

$$\lambda_P s = 0 \quad \text{für alle } P \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad s = 0 \quad \text{für alle } s \in S_q^r(\Delta).$$

Ist $\mathcal{A} = \{P_1, \dots, P_d\}$ eine minimal bestimmende Menge von $S_q^r(\Delta)$, dann lässt sich eine Menge $B = \{b_1, \dots, b_d\}$ von Funktionalen auf $\mathcal{B}_q(\Delta)$ so definieren, dass sie im folgenden Sinne dual zu \mathcal{A} ist:

$$(i) \quad b_i(P_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, d.$$

(ii) Für alle $P \in \mathcal{B}_q(\Delta) \setminus \mathcal{A}$ ist $b_i(P)$ eindeutig durch die in Theorem 2.1 gegebenen C^r -Stetigkeitsbedingungen bestimmt.

Betrachtet man nun für $i = 1, \dots, d$ $s_i \in S_q^r(\Delta)$ mit dem B-Netz-Repräsentanten b_i , dann ist $\{s_1, \dots, s_d\}$ eine Basis von $S_q^r(\Delta)$. Im Folgenden wird es daher bei der Bestimmung einer Basis für $S_q^r(\Delta)$ genügen, eine minimal bestimmende Menge für $S_q^r(\Delta)$ anzugeben.

Das folgende Theorem von Schumaker [56] besagt, dass die Anzahl der Elemente einer bestimmenden Menge von $S_q^r(\Delta)$ eine obere Schranke für die Dimension von $S_q^r(\Delta)$ liefert.

Theorem 2.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ und sei Δ eine beliebige Triangulierung von Ω . Ist \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_q^r(\Delta)$, dann gilt:*

$$\dim S_q^r(\Delta) \leq |\mathcal{A}|.$$

Ist \mathcal{A} eine minimal bestimmende Menge, so gilt:

$$\dim S_q^r(\Delta) = |\mathcal{A}|.$$

Morgan & Scott [42] bestimmten 1975 die Dimension von $S_q^1(\Delta)$, $q \geq 5$. Ohne Verwendung von Bernstein-Bézier-Techniken zeigten sie, dass die Dimension von $S_q^1(\Delta)$, $q \geq 5$, mit der in (2.9) gegebenen unteren Schranke übereinstimmt. Die Ergebnisse von Morgan und Scott wurden von Alfeld & Schumaker [3] für die Splineräume $S_q^r(\Delta)$, $q \geq 4r + 1$, verallgemeinert. Unter Verwendung von Bernstein-Bézier-Techniken bestimmte Hong [29] die Dimension von $S_q^r(\Delta)$, $q \geq 3r + 2$, für beliebige Triangulierungen.

Theorem 2.5. *Sei Δ eine beliebige Triangulierung. Für $q \geq 3r + 2$ ist die Dimension von $S_q^r(\Delta)$ gleich der unteren Schranke in (2.9).*

Das Problem der Bestimmung der Dimension von $S_q^r(\Delta)$, $q < 3r + 2$ und $r \geq 1$, für beliebige Triangulierungen ist im Allgemeinen bis heute noch ungelöst. Die einzige in der Literatur bekannte Ausnahme bildet der Fall $S_4^1(\Delta)$, für den Alfeld, Piper & Schumaker [2] bewiesen, dass

$$\dim S_4^1(\Delta) = 6|V| - 3 + S$$

gilt. Hierbei sowie im Folgenden bezeichne S stets die Anzahl der *singulären Eckpunkte* von Δ , d. h. der Eckpunkte, die Schnittpunkte zweier Kanten sind. Für C^1 -Splines gilt insbesondere, dass in (2.9) $\sigma_v = 1$ ist, falls v singulär ist, und in allen anderen Fällen $\sigma_v = 0$. Mit Hilfe der Euler-Formeln (2.1) und (2.2) lässt sich zeigen, dass die Dimensionsformel für $S_4^1(\Delta)$ gleich der unteren Schranke in (2.9) ist.

Für jeden Eckpunkt $v \in V$ definieren wir die *Standardzelle* Δ_v von v als die Vereinigung aller Dreiecke, die v als gemeinsamen Eckpunkt besitzen. Abbildung 2.6 zeigt beispielhaft die Standardzelle eines inneren Eckpunkts sowie die Zelle eines Randpunkts von v . Schumaker [59] bestimmte 1988 die Dimension von $S_q^r(\Delta_v)$ für einen beliebigen inneren Eckpunkt v .

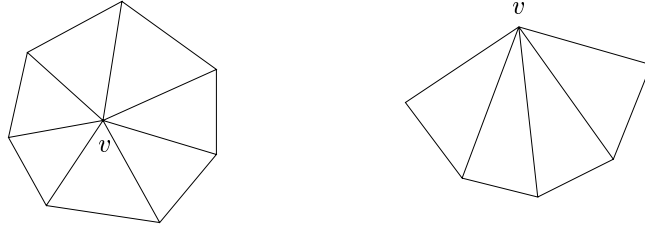


Abb. 2.6: Standardzelle eines inneren Eckpunkts und eines Randpunkts.

Theorem 2.6. Sei $v \in V_I$ und es sei Δ_v die Standardzelle von v . Dann gilt:

$$\dim S_q^r(\Delta_v) = \binom{q+2}{2} + \binom{q-r+1}{2} |E_I| - \left(\binom{q+2}{2} - \binom{r+2}{2} \right) + \sigma_v.$$

Für die Dimension von S_q^r auf der Standardzelle Δ_v eines Randpunkts v gilt offensichtlich:

$$\dim S_q^r(\Delta_v) = \binom{q+2}{2} + \binom{q-r+1}{2} |E_I|. \quad (2.10)$$

Wir definieren nun Teilmengen von $\mathcal{B}_q(\Delta_v)$, die wir im Folgenden für die Charakterisierung minimal bestimmender Mengen von $S_q^r(\Delta)$ benötigen. Für $p = 0, \dots, q$ ist der *Ring der Ordnung p von v* definiert durch

$$R_p(v) := \{P_{q-p,j,k}^{[l]} : j+k = q-p; l = 1, \dots, n\}.$$

Die *Scheibe der Ordnung p von v* ist dann die Vereinigung der Ringe $R_\rho(v)$, $\rho = 0, \dots, p$, d. h. es gilt

$$D_p(v) := \{P_{i,j,k}^{[l]} : i \geq q-p, i+j+k = q; l = 1, \dots, n\}.$$

Abbildung 2.7 zeigt die Mengen $R_2(v)$ und $D_2(v)$ für einen inneren Eckpunkt v .

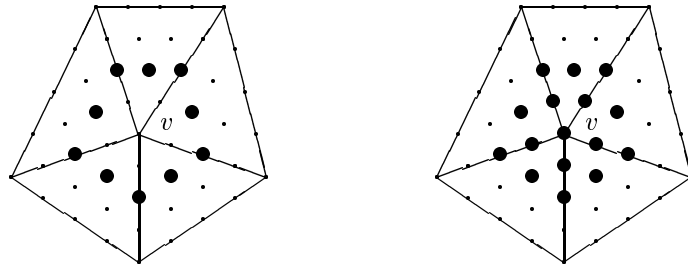


Abb. 2.7: Die Menge der BB-Punkte \bullet bildet den Ring der Ordnung 2 von v (links) bzw. die Scheibe der Ordnung 2 von v (rechts), $q = 4$.

Kapitel 3

Klassen von Triangulierungen

Als Grundlage für die Konstruktion von Interpolationsmengen für $S_q^r(\Delta)$, $r = 1, 2$, für allgemeine Klassen von Triangulierungen im Fall $q < 3r + 2$ bzw. für beliebige Triangulierungen für $q \geq 3r + 2$, entwickeln wir in diesem Kapitel Algorithmen zur schrittweisen Konstruktion von Triangulierungen und zum induktiven Durchlauf von gegebenen Triangulierungen. Dabei gehen wir nach dem folgenden Schema vor: Ausgehend von einem Startdreieck werden wir die Triangulierung induktiv konstruieren und durchlaufen, indem wir in geeigneter Weise Vereinigungen von Dreiecken zur bereits bestehenden Teiltriangulierung hinzufügen. Diese Vereinigungen von Dreiecken bestehen in der Regel aus den Dreiecken eines Kegels oder einer Zelle oder aus einem einzigen Dreieck, einem so genannten *Fill* oder *Flap*.

Definition 3.1. Es sei $\tilde{\Delta}$ eine einfach zusammenhängende Teiltriangulierung von Δ , und es sei v ein innerer Punkt von Δ und ein Randpunkt von $\tilde{\Delta}$. Dann sei

$$K := \{T : T \in \Delta_v \text{ und } T \notin \tilde{\Delta}\}. \quad (3.1)$$

Wir bezeichnen K als den *Kegel mit Scheitelpunkt v bzgl. $\tilde{\Delta}$* .

Definition 3.2. Es sei $\tilde{\Delta}$ eine einfach zusammenhängende Teiltriangulierung von Δ . Die Randpunkte von $\tilde{\Delta}$ seien gegen den Uhrzeigersinn mit v_0, \dots, v_n nummeriert. Dann ist v_ν , $\nu \in \{0, \dots, n\}$, ein *Fillpunkt bzgl. $\tilde{\Delta}$* , falls $[v_{\nu-1}, v_{\nu+1}] \in E$ gilt. (Die Indizes sind hierbei modulo $(n + 1)$ zu verstehen.) Das Dreieck $\Delta(v_{\nu-1}, v_\nu, v_{\nu+1})$ bezeichnen wir als *Fill*.

Wir bezeichnen $v \notin \tilde{\Delta}$ als einen *Flappunkt bzgl. $\tilde{\Delta}$* , falls zwei benachbarte Randpunkte $v_\nu, v_{\nu+1}$ von $\tilde{\Delta}$ existieren, so dass $\Delta(v, v_\nu, v_{\nu+1}) \in \Delta$ gilt. Das Dreieck $\Delta(v, v_\nu, v_{\nu+1})$ bezeichnen wir als *Flap*.

Abbildung 3.1 zeigt einen Kegel, einen Fill und einen Flap bzgl. einer Teiltriangulierung $\tilde{\Delta}$ von Δ .

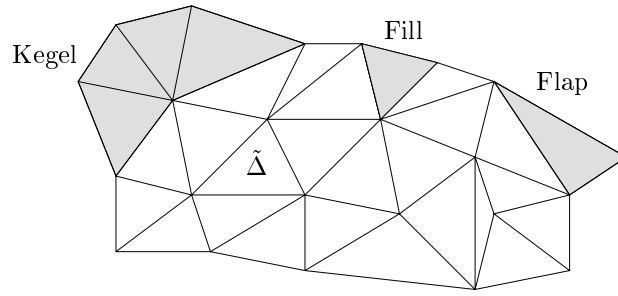


Abb. 3.1: Ein Kegel, Fill und Flap bzgl. der Triangulierung $\tilde{\Delta}$.

In Abschnitt 3.1 geben wir einen Algorithmus zur Konstruktion beliebiger Triangulierungen an, wobei schrittweise zu einer bereits konstruierten Teiltriangulierung an einer beliebigen Stelle ein Kegel, ein Fill oder die Zelle eines Flappunkts hinzugefügt wird. Ferner entwickeln wir eine Vorschrift für den Durchlauf durch eine gegebene Triangulierung. In Abschnitt 3.2 betrachten wir die Klasse der Triangulierungen, die entsteht, wenn wir in jedem Schritt der Konstruktion einen Kegel zur gegebenen Teiltriangulierung hinzufügen. Da wir in diesem Fall die Kegel nicht an einer beliebigen Stelle an die Teiltriangulierung anhängen, sondern in einer festgelegten Reihenfolge vorgehen, bezeichnen wir diese Klasse von Triangulierungen als *geordnete Kegeltriangulierungen*. Durch die Reihenfolge, in der die Kegel angehängt werden, ergibt sich in diesem Fall direkt eine Ordnung für den Durchlauf durch eine solche Triangulierung. Bei der in Abschnitt 3.3 konstruierten Klasse von Triangulierungen gehen wir ebenfalls in einer festgelegten Reihenfolge vor. Wir fügen nun jedoch entweder einen Kegel oder einen Fill zu der bereits konstruierten Teiltriangulierung hinzu. Wir bezeichnen die so konstruierten Triangulierungen als *geordnete Triangulierungen mit Fills*. Der Algorithmus zur Konstruktion einer solchen Triangulierung liefert uns ferner eine Vorschrift für den Durchlauf durch eine gegebene Triangulierung.

3.1 Beliebige Triangulierungen

Im Folgenden geben wir zunächst einen Algorithmus zur Konstruktion von Triangulierungen aus einer beliebigen endlichen Punktmenge in der Ebene an. Wir starten dabei mit einem Dreieck und fügen dann schrittweise zu der bereits konstruierten Teiltriangulierung einen Kegel, einen Fill oder einen Flap an einer beliebigen Stelle der Teiltriangulierung hinzu. Anschließend geben wir für beliebige Triangulierungen einen Algorithmus für den Durchlauf durch eine beliebige Triangulierung an, wobei gewährleistet ist, dass bei dem Durchlauf keine Löcher entstehen.

Betrachten wir eine Teiltriangulierung $\tilde{\Delta}$ von Δ , dann bezeichne im Folgenden $V^{(\nu)}$ die Menge aller Eckpunkte, $V_I^{(\nu)}$ die Menge der inneren Eckpunkte und $V_B^{(\nu)}$ die Menge der

Randpunkte von Δ_ν .

Algorithmus 1:

Sei \mathcal{P} eine endliche Punktmenge in der Ebene. Wir wählen drei Punkte $v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{P}$ so, dass im Inneren von $T^{[0]} := \Delta(v_1, v_2, v_3)$ kein weiterer Punkt von \mathcal{P} liegt. Dann setzen wir $\Delta_0 := T^{[0]}$.

Für $\nu \geq 1$ konstruieren wir die Triangulierung Δ_ν induktiv. Es sei $\Delta_{\nu-1}$ bereits konstruiert. Wir nummerieren die Randpunkte von $\Delta_{\nu-1}$ gegen den Uhrzeigersinn mit y_μ , $\mu = 0, \dots, m$. Das Rechnen mit Indizes ist im Folgenden zu verstehen als Rechnen modulo m . Wir erhalten Δ_ν wahlweise nach einer der drei folgenden Vorgehensweisen:

- (A) Sei y_μ ein Randpunkt von $\Delta_{\nu-1}$. Dann setzen wir $v_\nu = y_\mu$ und wählen lokal $\lambda_\nu \geq 1$ Punkte $v_{\nu,l}$, $l = 1, \dots, \lambda_\nu$, aus der Menge $\mathcal{P} \setminus V^{(\nu-1)}$. Ferner seien $v_{\nu,0} := y_{\mu-1}$ und $v_{\nu,\lambda_\nu+1} := y_{\mu+1}$. Für das Dreieck $T^{[\nu,l]} := \Delta(v_\nu, v_{\nu,l-1}, v_{\nu,l})$, $l = 1, \dots, \lambda_\nu+1$, gelte, dass kein weiterer Punkt von \mathcal{P} im Inneren von $T^{[\nu,l]}$ liegt und ferner $T^{[\nu,l]}$ selbst außerhalb von $\Delta_{\nu-1}$ liegt. Dann sei $\Delta_\nu := \Delta_{\nu-1} \cup K_\nu$ mit $K_\nu = \{T^{[\nu,l]} : l = 1, \dots, \lambda_\nu + 1\}$.
- (B) Sei y_μ ein Randpunkt von $\Delta_{\nu-1}$. Liegt das Dreieck $T^{[\nu,1]} = \Delta(y_{\mu-1}, y_\mu, y_{\mu+1})$ außerhalb von $\Delta_{\nu-1}$ und enthält $T^{[\nu,1]}$ keinen weiteren Punkt aus \mathcal{P} , dann setzen wir $v_\nu = y_\mu$ und es sei $K_\nu = T^{[\nu,1]}$. Ferner definieren wir $\Delta_\nu := \Delta_{\nu-1} \cup K_\nu$.
- (C) Wir wählen einen Punkt $v_\nu \in \mathcal{P} \setminus V^{(\nu-1)}$ so, dass für zwei benachbarte Randpunkte $y_\mu, y_{\mu+1}$ von $\Delta_{\nu-1}$ das Dreieck $T^{[\nu,1]} := \Delta(v_\nu, y_\mu, y_{\mu+1})$ außerhalb von $\Delta_{\nu-1}$ liegt und keinen weiteren Punkt aus \mathcal{P} enthält. Dann setzen wir $K_\nu = T^{[\nu,1]}$ und $\Delta_\nu := \Delta_{\nu-1} \cup K_\nu$.

Bemerkungen 3.3. (i) Sei $\Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \dots \subset \Delta_n = \Delta$ eine Zerlegung von Δ in Teiltriangulierungen, die wir bei der Konstruktion von Δ nach Algorithmus 1 erhalten. Nach Konstruktion ist dann Δ_ν , $\nu = 0, \dots, n$, einfach zusammenhängend.

(ii) Bei der Konstruktion der Triangulierung Δ ist die Vorgehensweise (A) nicht unbedingt notwendig, da ein Kegel auch als Vereinigung von Flaps und einem Fill aufgefasst werden kann. Wenn möglich, bevorzugen wir jedoch statt des schrittweisen Anhängens von Flaps und eines Fills an die Teiltriangulierung das Hinzufügen eines Kegels zu dieser.

Wir geben nun einen Algorithmus für den Durchlauf durch eine beliebige Triangulierung an. Es bezeichne \tilde{V}_B die Menge aller Randpunkte von Δ , von denen nur Randkanten von Δ ausgehen. Ist $\Delta_{\nu-1}$ eine bereits durchlaufene Teiltriangulierung und ist v_ν ein Randpunkt von $\Delta_{\nu-1}$, definieren wir K_ν wie in (3.1). Es bezeichne λ_ν die Anzahl der von v_ν

ausgehenden Kanten, die nicht in $\Delta_{\nu-1}$ liegen. Ferner sei $n_\nu := \deg(v_\nu)$. Wir nummerieren die Randpunkte der Zelle Δ_{v_ν} gegen den Uhrzeigersinn mit $v_{\nu,0}, \dots, v_{\nu,n_\nu-1}$. Für $l = 1, \dots, n_\nu$ sei $T^{[\nu,l]} := \Delta(v_\nu, v_{\nu,l-1}, v_{\nu,l})$. Die Indizes l sind hierbei sowie im Folgenden stets als l modulo n_ν zu verstehen.

Gilt $v_\nu \in V_I$, dann sei

$$K_\nu = \{T^{[\nu,l]} : l = 1, \dots, \lambda_\nu\}. \quad (3.2)$$

Ist v_ν ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, dann gelte

$$K_\nu = \begin{cases} \{T : T \in \Delta_{v_\nu}\} & \text{für } v_\nu \in V_I, \\ \Delta(v_\nu, v_{\nu,0}, v_{\nu,1}) & \text{für } v_\nu \in V_B, \end{cases} \quad \text{und} \quad [v_{\nu,0}, v_{\nu,1}] \in E_B^{(\nu-1)}. \quad (3.3)$$

Im Folgenden bestimmen wir auf den inneren Eckpunkten von Δ sowie auf den Randpunkten aus \tilde{V}_B eine Reihenfolge. Hierbei ist der jeweils nächste Eckpunkt v_ν nicht eindeutig festgelegt. Wir durchlaufen zunächst die Eckpunkte aus V_I und anschließend die Randpunkte aus \tilde{V}_B und erhalten so eine Indizierung v_ν , $\nu = 1, \dots, |V_I| + |\tilde{V}_B|$. Wir geben nun den genauen Algorithmus für die Indizierung der Eckpunkte an. Dabei gelte $I := |V_I|$ und $\tilde{B} := |\tilde{V}_B|$.

Algorithmus 2:

Wir wählen ein Startdreieck $T^{[0]} \in \Delta$ so, dass mindestens einer der Eckpunkte von $T^{[0]}$ ein innerer Eckpunkt von Δ ist. Dann sei $\Delta_0 := T^{[0]}$. Für $\nu = 1, \dots, I$ konstruieren wir die Teiltriangulierung Δ_ν wie folgt. Sei $\Delta_{\nu-1}$ gegeben. Wir nummerieren die Randpunkte von $\Delta_{\nu-1}$ gegen den Uhrzeigersinn mit y_μ , $\mu = 0, \dots, m$. Ist y_μ ein Fillpunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, setzen wir $v_\nu := y_\mu$. Ist keiner der Randpunkte von $\Delta_{\nu-1}$ ein Fillpunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, bestimmen wir einen Randpunkt y_μ von $\Delta_{\nu-1}$, so dass $y_\mu \in V_I$ gilt und y_μ mit keinem Randpunkt von $\Delta_{\nu-1}$ außer mit $y_{\mu-1}$ und $y_{\mu+1}$ eine gemeinsame Kante in Δ hat. Dann setzen wir $v_\nu := y_\mu$. In beiden Fällen definieren wir Δ_ν durch $\Delta_\nu := \Delta_{\nu-1} \cup K_\nu$, wobei K_ν wie in (3.2) definiert ist. Ist kein Randpunkt von $\Delta_{\nu-1}$ ein innerer Eckpunkt von Δ , konstruieren wir Δ_ν wie folgt. Es sei y ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ und es gelte $y \in V_I$, falls $\nu - 1 < I$ ist, und $y \in \tilde{V}_B$, falls $\nu - 1 \geq I$ ist. Dann setzen wir $v_\nu := y$ und $\Delta_\nu := \Delta_{\nu-1} \cup K_\nu$, wobei K_ν wie in (3.3) definiert ist.

Bemerkung 3.4. (i) Nach Konstruktion wird ein Flappunkt nur dann zu der Teiltriangulierung $\Delta_{\nu-1}$ hinzugefügt, wenn alle Randpunkte von $\Delta_{\nu-1}$ auch Randpunkte von Δ sind.

(ii) Nach Konstruktion gilt $\{v_1, \dots, v_I\} = V_I$. Gilt $V_B^{(\nu)} \cap V_I = \emptyset$ für ein $\nu < I$, gibt es mindestens ein $y \in V_I \setminus V^{(\nu)}$, so dass y ein Flappunkt bzgl. Δ_ν ist, da Δ einfach zusammenhängend ist und ferner $V_I \setminus V^{(\nu)} \neq \emptyset$ gilt.

Das folgende Theorem besagt, dass wir eine gegebene Triangulierung Δ mittels Algorithmus 2 so durchlaufen, dass zu keinem Zeitpunkt bereits durchlaufene Teiltriangulierungen mit Löchern entstehen.

Theorem 3.5. *Für $\nu = 0, \dots, I + \tilde{B}$ ist Δ_ν einfach zusammenhängend.*

Beweis. Für $\nu \in \{0, \dots, I - 1\}$ sei Δ_ν gegeben. Wir zeigen zunächst, dass die Teiltriangulierung $\Delta_{\nu+1}$ wohldefiniert ist. Wir nehmen dazu an, dass Δ_ν einfach zusammenhängend ist. Wir betrachten zunächst den Fall $V_B^{(\nu)} \cap V_I = \emptyset$. Dann folgt mit Bemerkung 3.4 (ii), dass ein Flappunkt y bzgl. Δ_ν existiert. $v_{\nu+1}$ und $\Delta_{\nu+1}$ sind somit wohldefiniert.

Es gelte nun $V_B^{(\nu)} \cap V_I \neq \emptyset$. Die Randpunkte von Δ_ν seien mit y_0, \dots, y_{m_ν} nummeriert. Dann ist zu zeigen, dass mindestens ein $y_\mu \in V_B^{(\nu)} \cap V_I$ existiert, so dass y_μ außer mit $y_{\mu-1}$ und $y_{\mu+1}$ mit keinem weiteren Randpunkt von Δ_ν eine gemeinsame Kante in Δ hat.

Annahme: Keiner der Eckpunkte $y_\mu \in V_B^{(\nu)} \cap V_I$ ist ein Fillpunkt bzgl. $\Delta^{(\nu)}$. Ferner hat jeder Eckpunkt $y_\mu \in V_B^{(\nu)} \cap V_I$ außer mit $y_{\mu-1}$ und $y_{\mu+1}$ mit noch mindestens einem weiteren Randpunkt von Δ_ν eine gemeinsame Kante in Δ .

Gilt für ein $y_\mu \in V_B^{(\nu)} \cap V_I$, $\mu \in \{0, \dots, m\}$, dass $[y_\mu, y_{\mu+2}] \in E$ ist, dann folgt offensichtlich $y_{\mu+1} \in V_I$, da Δ einfach zusammenhängend ist. Ferner kann $y_{\mu+1}$ mit keinem Eckpunkt aus $V_B^{(\nu)} \setminus \{y_\mu, y_{\mu+2}\}$ eine gemeinsame Kante besitzen. Dies steht aber im Widerspruch zur Annahme. Somit folgt

$$[y_\mu, y_{\mu-2}], [y_\mu, y_{\mu+2}] \notin E, \quad y_\mu \in V_B^{(\nu)} \cap V_I. \quad (3.4)$$

Nach Annahme gilt des Weiteren für alle $y_\mu \in V_B^{(\nu)} \cap V_I$, dass ein Index k_μ existiert mit

$$k_\mu \notin \{\mu - 2, \mu - 1, \mu, \mu + 1, \mu + 2\} \quad \text{und} \quad [y_\mu, y_{k_\mu}] \in E. \quad (3.5)$$

Seien $y \in V_B^{(\nu)} \cap V_I$ und $K = \{T : T \in \Delta_y, T \notin \Delta_\nu\}$. Dann besitzt die Triangulierung $\Delta_\nu \cup K$ nach Annahme ein Loch. Wir bezeichnen dieses Loch mit L . Die Randpunkte von Δ_ν seien o.B.d.A. so nummeriert, dass $y_1 = y$ gilt und die Menge der Randpunkte von L die Punkte y_2, \dots, y_{k_1} enthält, wobei $[y_1, y_{k_1}] \in E$ gelte (vgl. Abb. 3.2). Wegen (3.4) und nach Konstruktion folgt für $k = 3, \dots, k_1 - 1$, dass $[y_1, y_k] \notin E$ gilt, d. h. k_1 ist der kleinste Index mit $k_1 \geq 4$, so dass $[y_1, y_{k_1}] \in E$ gilt. Gilt $k_1 > 4$, dann gibt es wegen (3.4) und (3.5) einen Index k_2 mit $k_1 \geq k_2 \geq 5$, so dass $[y_2, y_{k_2}] \in E$ gilt. Sei k_2 der kleinste Index mit dieser Eigenschaft. Durch Wiederholen dieses Arguments erhalten wir eine Reihe $k_1 \geq k_2 \geq k_{\mu^*}$ mit $\mu^* \in \{2, \dots, k_1 - 3\}$, so dass $[y_\mu, y_{k_\mu}] \in E$, $\mu = 1, \dots, \mu^*$, und $k_{\mu^*} = \mu^* + 3$ gilt. Ist $k_1 = 4$, so gilt offensichtlich für $\mu^* = 1$ ebenfalls, dass $k_{\mu^*} = \mu^* + 3$ ist. Da Δ einfach zusammenhängend ist, folgt somit $y_{\mu^*+1} \in V_I$. Wegen (3.4) gilt aber $[y_{\mu^*+1}, y_{\mu^*+3}] \notin E$. D. h. y_{μ^*+1} hat im Widerspruch zur Annahme mit keinem Eckpunkt aus $V_B^{(\nu)} \setminus \{y_{\mu^*}, y_{\mu^*+2}\}$ eine gemeinsame Kante.

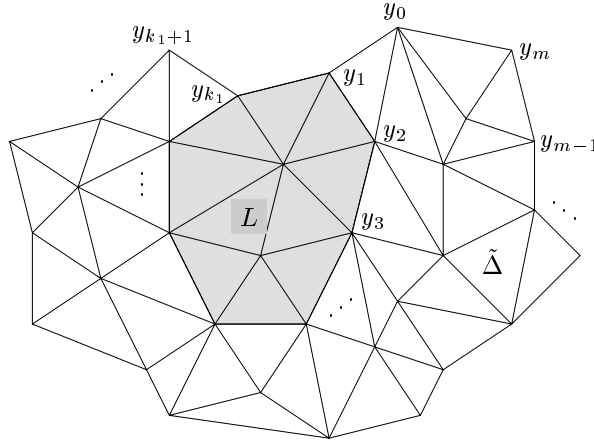


Abb. 3.2: Nummerierung der Randpunkte eines Lochs L .

Wir erhalten somit, dass mindestens einer der Eckpunkte $y_\mu \in V_B^{(\nu)} \cap V_I$ mit keinem Randpunkt von Δ_ν außer mit $y_{\mu-1}$ und $y_{\mu+1}$ eine gemeinsame Kante hat. Somit folgt, dass sowohl $v_{\nu+1}$ als auch $\Delta_{\nu+1}$ wohldefiniert sind. Es bleibt zu zeigen, dass für $\nu = 0, \dots, I + \tilde{B}$ die Teiltriangulierung Δ_ν einfach zusammenhängend ist.

Beweis durch vollständige Induktion nach ν .

Induktionsanfang $\nu = 0$. $\Delta_0 = T^{[0]}$ ist offensichtlich einfach zusammenhängend.

Induktionsschritt $\nu \rightarrow \nu + 1$. Es sei bereits bewiesen, dass Δ_ν einfach zusammenhängend ist. Ist $v_{\nu+1}$ ein Randpunkt von Δ_ν , so hat v_ν nach Voraussetzung mit keinem Randpunkt von Δ_ν außer den direkt benachbarten Randpunkten eine gemeinsame Kante in Δ . Somit folgt direkt, dass $\Delta_{\nu+1} = \Delta_\nu \cup K_\nu$ einfach zusammenhängend ist. Ist $v_{\nu+1}$ ein Flappunkt bzgl. Δ_ν , so gilt mit Bemerkung 3.4 (i), dass alle Randpunkte von Δ_ν auch Randpunkte von Δ sind. Nach Konstruktion folgt dann, dass auch $\Delta_{\nu+1}$ einfach zusammenhängend ist. ■

3.2 Geordnete Kegeltriangulierungen

Gegeben sei eine Menge \mathcal{P} endlich vieler Punkte in der Ebene. In diesem Abschnitt konstruieren wir für \mathcal{P} eine Klasse von Triangulierungen, indem wir ausgehend von einem Startdreieck schrittweise Kegel mit Eckpunkten aus \mathcal{P} definieren und diese zur bereits konstruierten Teiltriangulierung hinzufügen. Da wir dabei gemäß des folgenden Algorithmus in einer festen Reihenfolge vorgehen, bezeichnen wir die so konstruierten Triangulierungen Δ als *geordnete Kegeltriangulierungen*.

Algorithmus 3:

Wir setzen voraus, dass wir in jedem Schritt der Konstruktion genügend Punkte hin-

zufügen können. Im ersten Schritt wählen wir drei Punkte von \mathcal{P} so, dass das zugehörige Dreieck $T^{[0]}$ keinen anderen Punkt enthält, und setzen $\Delta_0 := T^{[0]}$. Wir nummerieren die Eckpunkte von $T^{[0]}$ gegen den Uhrzeigersinn mit v_1, v_2, v_3 . Die Anzahl der Eckpunkte der Teiltriangulierung Δ_0 bezeichnen wir mit N_0 . Für $\nu \geq 1$ konstruieren wir die Triangulierung Δ_ν induktiv. Sei $\Delta_{\nu-1}$ gegeben. Die Randpunkte von $\Delta_{\nu-1}$ seien gegen den Uhrzeigersinn mit $v_\nu, \dots, v_{N_{\nu-1}}$ nummeriert, wobei $N_{\nu-1}$ die Anzahl der Eckpunkte von $\Delta_{\nu-1}$ bezeichne. Wir erhalten Δ_ν , indem wir für den Eckpunkt v_ν lokal Punkte $v_{N_{\nu-1}+l}$, $l = 1, \dots, \lambda_\nu$, $\lambda_\nu \geq 1$, wählen und wie folgt zu $\Delta_{\nu-1}$ hinzufügen. Für $l = 0, \dots, \lambda_\nu$ setzen wir $v_{\nu,l} := v_{N_{\nu-1}+l}$ und $v_{\nu,\lambda_\nu+1} := v_{\nu+1}$. Dann sei $K_\nu := \{T^{[\nu,l]} : l = 1, \dots, \lambda_\nu + 1\}$, wobei $T^{[\nu,l]} = \Delta(v_\nu, v_{\nu,l-1}, v_{\nu,l})$ gelte, und wir definieren $\Delta_\nu := \Delta_{\nu-1} \cup K_\nu$.

Bemerkung 3.6. *Falls genügend Punkte existieren, kann für jedes $\nu \in \{1, \dots, n\}$ ein Kegel mit den obigen Eigenschaften zur Triangulierung $\Delta_{\nu-1}$ hinzugefügt werden. Falls für ein $\nu \in \{1, \dots, n\}$ ein solcher Kegel nicht hinzugefügt werden kann, wählen wir nur einen Punkt und fügen ein Dreieck mit Eckpunkt v_ν , das genau eine Kante mit der gegebenen Triangulierung gemeinsam hat, hinzu und fahren so fort. Gehen wir nach dieser Methode weiter vor, so erhalten wir schließlich die Triangulierung Δ .*

Ist Δ eine geordnete Kegeltriangulierung, so liefert uns Algorithmus 3 ebenfalls eine für den Durchlauf von Δ geeignete Indizierung der Eckpunkte von Δ . D. h. wir durchlaufen Δ in der gleichen Art und Weise, wie Δ konstruiert wurde.

3.3 Geordnete Triangulierungen mit Fills

Gegeben sei eine Menge \mathcal{P} endlich vieler Punkte in der Ebene. Im Folgenden konstruieren wir aus diesen Punkten induktiv eine Triangulierung Δ . Ausgehend von einem Startdreieck hängen wir dazu schrittweise an eine bereits konstruierte Teiltriangulierung einen Kegel oder einen Fill an. Der Algorithmus lautet wie folgt.

Algorithmus 4:

Wir wählen im ersten Schritt drei nicht kollineare Punkte aus \mathcal{P} , so dass das zugehörige Dreieck $T^{[0]}$ keinen weiteren Punkt von \mathcal{P} enthält. Dann setzen wir $\Delta_0 := T^{[0]}$ und nummerieren die Eckpunkte von Δ_0 gegen den Uhrzeigersinn mit y_1, y_2, y_3 . Für $\nu \geq 1$ sei die Teiltriangulierung $\Delta_{\nu-1}$ bereits konstruiert. Die Randpunkte von $\Delta_{\nu-1}$ seien gegen den Uhrzeigersinn mit $y_1, \dots, y_{m_{\nu-1}}$ nummeriert. Soll y_1 ein Randpunkt der Triangulierung Δ sein, setzen wir $v_\nu := y_1$ und $\Delta_{\nu-1} := \Delta_\nu$. Die Randpunkte von Δ_ν nummerieren wir ausgehend von y_2 bis $y_{m_{\nu-1}}$ gegen den Uhrzeigersinn neu mit y_1, \dots, y_{m_ν} , wobei $m_\nu = m_{\nu-1} - 1$ gilt. Wenn y_1 kein Randpunkt der Triangulierung Δ sein soll, konstruieren wir Δ_ν nach einer der drei folgenden Vorgehensweisen:

- (A) Wir setzen $v_\nu := y_1$ und wählen lokal λ_ν Punkte aus \mathcal{P} , $\lambda_\nu \geq 1$. Wir nummerieren diese Punkte mit $v_{\nu,1}, \dots, v_{\nu,\lambda_\nu}$ so, dass die Eckpunkte v_ν , $v_{\nu,l-1}$ und $v_{\nu,l}$ für $l = 1, \dots, \lambda_\nu$ ein Dreieck bilden, das keinen weiteren Punkt von \mathcal{P} enthält. Dabei gelte $v_{\nu,0} = y_{m_{\nu-1}}$ und $v_{\nu,\lambda_\nu+1} = y_2$. Dann definieren wir $T^{[\nu,l]} := \Delta(v_\nu, v_{\nu,l-1}, v_{\nu,l})$, $l = 1, \dots, \lambda_\nu + 1$, und es sei $K_\nu := \{T^{[\nu,l]} : l = 1, \dots, \lambda_\nu + 1\}$.
- (B) Liegt das Dreieck $T^{[\nu,1]} = \Delta(y_{m_{\nu-1}}, y_1, y_2)$ außerhalb von $\Delta_{\nu-1}$, setzen wir $v_\nu := y_1$ und $K_\nu := T^{[\nu,1]}$.

In beiden Fällen setzen wir $\Delta_\nu := \Delta_{\nu-1} \cup K_\nu$ und nummerieren die Randpunkte von Δ_ν ausgehend von y_2 gegen den Uhrzeigersinn mit y_1, \dots, y_{m_ν} .

- (C) Für ein $\mu \geq 1$ setzen wir $v_{\nu+k} := y_{m_{\nu-1}-\mu+k}$, $k = 0, \dots, \mu - 1$ und $v_{\nu+\mu} := y_1$. Wir wählen lokal $(\lambda_{\nu+\mu} + 1)$ Punkte aus \mathcal{P} , $\lambda_{\nu+\mu} \geq 0$, und nummerieren diese mit $v_{\nu+1}, \dots, v_{\nu+\mu, \lambda_{\nu+\mu}}$ (vgl. Abb. 3.3). Im Folgenden setzen wir voraus, dass alle neu definierten Dreiecke nicht degenerierte Dreiecke sind, die im Inneren keinen weiteren Eckpunkt von \mathcal{P} enthalten und außerhalb von $\Delta_{\nu-1}$ liegen. Für $l \in \{1, 2\}$ definieren wir $T^{[\nu,l]} := \Delta(v_\nu, v_{\nu,l-1}, v_{\nu,l})$, wobei $v_{\nu,0} = y_{m_{\nu-1}-\mu-1}$ und $v_{\nu,2} = v_{\nu+1}$ gelte. Dann sei $K_\nu := \{T^{[\nu,1]}, T^{[\nu,2]}\}$. Für $k = 1, \dots, \mu - 1$ sei $T^{[\nu+k,1]} := \Delta(v_{\nu+k}, v_{\nu+k+1}, v_{\nu,1})$. Dann setzen wir $K_{\nu+k} := T^{[\nu+k,1]}$, $k = 1, \dots, \mu - 1$. Für $l = 1, \dots, \lambda_{\nu+\mu} + 1$ sei $T^{[\nu+\mu,l]} := \Delta(v_{\nu+\mu}, v_{\nu+\mu,l-1}, v_{\nu+\mu,l})$ mit $v_{\nu+\mu,0} = v_{\nu,1}$ und $v_{\nu+\mu, \lambda_{\nu+\mu}+1} = y_2$. Dann setzen wir $K_{\nu+\mu} := \{T^{[\nu+\mu,l]} : l = 1, \dots, \lambda_{\nu+\mu} + 1\}$. Die Teiltriangulierung $\Delta_{\nu+k}$ definieren wir dann induktiv durch $\Delta_{\nu+k} := \Delta_{\nu+k-1} \cup K_{\nu+k}$, $k = 0, \dots, \mu$. Die Randpunkte von $\Delta_{\nu+\mu}$ nummerieren wir schließlich ausgehend von y_2 gegen den Uhrzeigersinn wiederum mit y_1, \dots, y_{m_ν} .

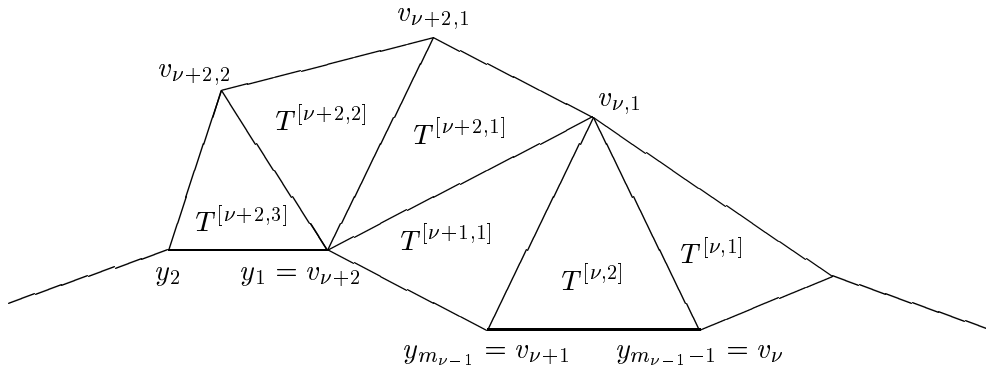


Abb. 3.3: Nummerierung der Eckpunkte $v_{\nu+k}$, $k = 0, \dots, \mu$, für den Fall (C) in Algorithmus 4 mit $\mu = 2$ und $\lambda_{\nu+2} = 2$.

Bemerkung 3.7. *Bei der Konstruktion von Δ nach Algorithmus 4 entstehen beim Hinzufügen eines Kegels K_ν zu der bereits konstruierten Teiltriangulierung $\Delta_{\nu-1}$ keine Fillpunkte, die im Uhrzeigersinn neben v_ν liegen. Somit ist gewährleistet, dass die neu entstehenden Fillpunkte direkt in den nächsten Schritten behandelt werden.*

Algorithmus 4 liefert uns ferner eine für den Durchlauf von Δ geeignete Indizierung der Eckpunkte von Δ . D. h. wir durchlaufen Δ in der gleichen Art und Weise, wie Δ konstruiert wurde.

Kapitel 4

Minimal bestimmende Mengen von $S_q^1(\Delta)$ auf Kegeln und Zellen

Wie wir in Kapitel 3 gesehen haben, verwenden wir Kegel als grundlegende Bausteine bei der Konstruktion und beim Durchlauf von Triangulierungen. In den folgenden Kapiteln werden wir ausgehend von einer solchen Zerlegung einer Triangulierung Δ induktiv minimal bestimmende Mengen von $S_q^1(\Delta)$, $q \geq 3$, konstruieren. Zu einer bereits konstruierten Teiltriangulierung $\tilde{\Delta}$ fügen wir einen Kegel K hinzu und definieren

$$\tilde{\Delta}_K := \tilde{\Delta} \cup K. \quad (4.1)$$

In diesem Kapitel geben wir eine vollständige Charakterisierung der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^1(\tilde{\Delta}_K)$, $q \geq 3$, auf einem beliebigen Kegel K an, wobei wir davon ausgehen, dass $S_q^1(\tilde{\Delta})$ bereits bestimmt ist. In Abschnitt 4.1 analysieren wir für beliebige Kegel die Relationen, die durch die C^1 -Stetigkeitsbedingungen auf den BB-Punkten des Kegels gegeben sind. Ausgehend von diesen Untersuchungen charakterisieren wir die minimal bestimmenden Mengen von $S_q^1(\tilde{\Delta}_K)$ auf geeigneten Teilmengen der Menge aller BB-Punkte eines Kegels. Unter Verwendung dieser Resultate erhalten wir in Abschnitt 4.2 eine vollständige Charakterisierung der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^1(\tilde{\Delta}_K)$ auf beliebigen Kegeln. Fassen wir die Zelle eines inneren Eckpunkts als die Vereinigung eines Dreiecks und eines Kegels bzw. als die Vereinigung einer Kante und eines Kegels auf, so erhalten wir, wie in Abschnitt 4.3 dargestellt, basierend auf den Resultaten für Kegel allgemeine Klassen minimal bestimmender Mengen von $S_q^1(\Delta)$ auf der Zelle eines beliebigen inneren Eckpunkts. Im Fall singulärer Eckpunkte erhalten wir sogar eine vollständige Beschreibung der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^1(\Delta)$ auf der zugehörigen Zelle. Schumaker [59] konstruierte eine spezielle minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta)$ auf der Zelle eines inneren Eckpunkts. Diese Menge ist in der von uns beschriebenen Klasse

enthalten. In Abschnitt 4.4 konstruieren wir unter Verwendung der Ergebnisse aus Abschnitt 4.2 eine große Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_q^1(\Delta)$ auf der Zelle eines beliebigen Randpunkts.

Im Folgenden sei K stets einen Kegel mit Scheitelpunkt v und λ inneren Kanten, $\lambda \geq 1$. Die Eckpunkte, Kanten und Dreiecke von K seien wie in Abbildung 4.1 nummeriert. Für die Eckpunkte von $T^{[l]}$ gelte ferner $v_1^{[l]} = v$, $v_2^{[l]} = v_l$ und $v_3^{[l]} = v_{l-1}$.

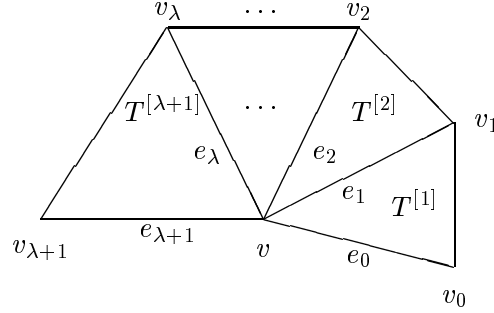


Abb. 4.1: Bezeichnung der Dreiecke, Kanten und Eckpunkte eines Kegels K mit λ inneren Kanten.

Ist $S_q^1(\tilde{\Delta}_K)$ auf $\mathcal{B}_q(\tilde{\Delta})$ eindeutig bestimmt, folgt aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen an den Randkanten von $\tilde{\Delta}$, dass $S_q^1(\tilde{\Delta}_K)$ auch auf $D_1(v) \cup \{P_{i,j,k}^{[1]}, P_{i,k,j}^{[\lambda+1]} : j \leq 1, i+j+k=q\}$ eindeutig bestimmt ist, falls K mindestens eine innere Kante besitzt, die nicht bzgl. v degeneriert ist. Anderenfalls gilt die in Abbildung 4.2 gezeigte Situation. Sind alle inneren Kanten von K bzgl. v degeneriert und ist v nicht singular, ist $S_q^1(\tilde{\Delta}_K)$ auf einem BB-Punkt in $D_2(v)$ überbestimmt.

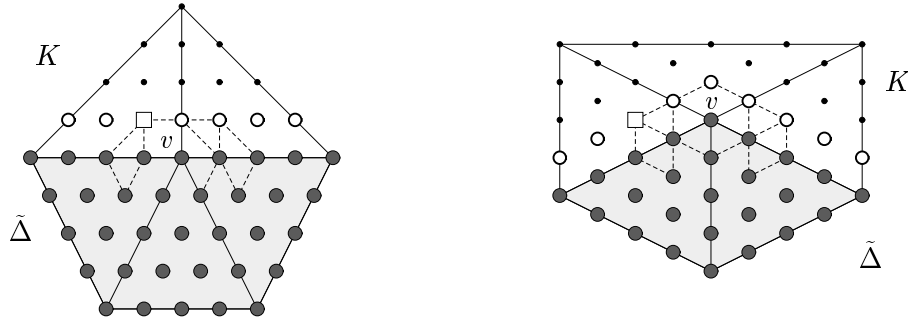


Abb. 4.2: $S_q^1(\tilde{\Delta}_K)$ ist auf dem BB-Punkt \square überbestimmt, da die inneren Kanten von K bzgl. v degeneriert sind.

Ist der Eckpunkt v nicht singular und sind alle inneren Kanten des Kegels K bzgl. v degeneriert, bezeichnen wir den Eckpunkt v , der Notation von Davydov & Nürnberger [18] entsprechend, als *semisingulären Eckpunkt* bzgl. $\tilde{\Delta}$.

Definition 4.1. Sei Δ eine einfach zusammenhängende Triangulierung. Ferner sei $\tilde{\Delta}$ eine Teiltriangulierung von Δ . Für einen Randpunkt v von $\tilde{\Delta}$ sei der Kegel K wie oben definiert. Wir bezeichnen v als *semisingulären Eckpunkt vom Typ I* bzgl. $\tilde{\Delta}$, falls K aus genau zwei Dreiecken $T^{[1]}, T^{[2]}$ besteht und die Kante e_1 bzgl. v degeneriert ist. Wir bezeichnen v als *semisingulären Eckpunkt vom Typ II* bzgl. $\tilde{\Delta}$, falls K aus genau drei Dreiecken $T^{[1]}, T^{[2]}, T^{[3]}$ besteht und sowohl e_1 als auch e_2 bzgl. v degeneriert ist. v heißt *semisingulär* bzgl. $\tilde{\Delta}$, falls er entweder semisingulär vom Typ I oder semisingulär vom Typ II bzgl. $\tilde{\Delta}$ ist.

Abbildung 4.2 zeigt sowohl einen semisingulären Eckpunkt v vom Typ I bzgl. $\tilde{\Delta}$ (links) als auch einen semisingulären Eckpunkt v vom Typ II bzgl. $\tilde{\Delta}$ (rechts).

Wir definieren die folgende Menge von $\mathcal{B}_q(K)$. Es sei

$$R_1(K) := D_1(v) \cup \{P_{i,j,k}^{[1]}, P_{i,k,j}^{[\lambda+1]} : j \leq 1, i+k = q-j\}, \quad (4.2)$$

falls v nicht semisingulär vom Typ II ist. Anderenfalls sei

$$R_1(K) := D_1(v) \cup \{P_{i,j,k}^{[1]}, P_{i,k,j}^{[3]} : j \leq 1, i+k = q-j\} \cup \{P_{q-2,1,1}^{[2]}\}. \quad (4.3)$$

Ist v nicht semisingulär bzgl. $\tilde{\Delta}$ und ist $\tilde{\mathcal{A}}$ eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(\tilde{\Delta})$, dann ist $S_q^1(\tilde{\Delta}_K)$ durch die C^1 -Stetigkeitsbedingungen an den Randkanten von $\tilde{\Delta}$ und am Eckpunkt v offensichtlich auch auf $R_1(K)$ eindeutig bestimmt. Mit (2.10) erhalten wir somit das folgende Korollar (vgl. Nürnberger & Zeilfelder [49]).

Korollar 4.2. Für $q \geq 3$ gilt

$$\dim S_q^1(\tilde{\Delta}_K) = \dim S_q^1(\tilde{\Delta}) + \lambda \frac{q(q-1)}{2} + \frac{(q-2)(q-3)}{2} - 1.$$

4.1 Vereinigungen von C^1 -Mengen

Es sei K ein beliebiger Kegel mit Scheitelpunkt v und λ inneren Kanten, $\lambda \geq 1$. In diesem Abschnitt analysieren wir die durch die C^1 -Stetigkeitsbedingungen gegebenen Relationen auf $\mathcal{B}_q(K)$, $q \geq 3$. Dazu führen wir das Konzept der C^1 -Mengen ein. Ausgehend von unseren Untersuchungen zerlegen wir die Menge $\mathcal{B}_q(K)$ in geeignete Teilmengen, auf denen wir die minimal bestimmenden Mengen von $S_q^1(K)$ für $q \geq 3$ vollständig charakterisieren. Nach Voraussetzung ist $S_q^1(K)$ auf $R_1(K)$ eindeutig bestimmt. Wir betrachten im Folgenden $\mathcal{B}_q(K) \setminus R_1(K)$. Wir definieren

$$\mathcal{M} := \begin{cases} \emptyset & \text{für } q = 3, \\ \{P_{i,j,k}^{[l]} : j, k \geq 2, l = 1, \dots, \lambda+1\} & \text{für } q \geq 4. \end{cases} \quad (4.4)$$

Da die BB-Punkte von \mathcal{M} in keiner der C^1 -Stetigkeitsbedingungen an den inneren Kanten von K involviert sind, muss jede minimal bestimmende Menge von $S_q^1(K)$ die Menge \mathcal{M} enthalten.

Die BB-Punkte von $\mathcal{B}_q(K)$, die weder in $R_1(K)$ noch in \mathcal{M} liegen, stehen mit mindestens zwei oder drei anderen BB-Punkten in einer Beziehung, die durch eine C^1 -Stetigkeitsbedingung an einer der inneren Kanten von K gegeben ist. Die C^1 -Mengen werden basierend auf diesen Beziehungen definiert.

Definition 4.3. Es sei K ein Kegel mit λ inneren Kanten, $\lambda \geq 1$. Für $l = 1, \dots, \lambda$ und $p = 1, \dots, q$ bezeichnen wir die Menge $C_{l,p}^1(v)$ als C^1 -Menge des Scheitelpunkts v bzgl. der Kante e_l . Ist e_l nicht degeneriert, so gelte

$$C_{l,p}^1(v) := \{P_{q-p,p,0}^{[l]}, P_{q-p+1,p-1,0}^{[l]}, P_{q-p,p-1,1}^{[l]}, P_{q-p,1,p-1}^{[l+1]}\}.$$

Ist e_l bzgl. v_l degeneriert ist, so gelte

$$C_{l,p}^1(v) := \{P_{q-p,p,0}^{[l]}, P_{q-p,p-1,1}^{[l]}, P_{q-p,1,p-1}^{[l+1]}\}.$$

Ist e_l bzgl. v degeneriert ist, so gelte

$$C_{l,p}^1(v) := \{P_{q-p+1,p-1,0}^{[l]}, P_{q-p,p-1,1}^{[l]}, P_{q-p,1,p-1}^{[l+1]}\}.$$

Eine C^1 -Menge $C_{l,p}^1(v)$ heißt *degeneriert*, falls e_l degeneriert ist, anderenfalls nennen wir $C_{l,p}^1(v)$ *nicht degeneriert*.

Mit der Definition der C^1 -Mengen auf K erhalten wir die folgende Zerlegung von $\mathcal{B}_q(K)$:

$$\mathcal{B}_q(K) = R_1(K) \cup \mathcal{M} \cup \left(\bigcup_{l=1}^{\lambda} \bigcup_{p=2}^q C_{l,p}^1(v) \right). \quad (4.5)$$

Das Problem der Charakterisierung der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^1(K)$ reduziert sich somit auf die Angabe der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^1(K)$ auf

$$\mathcal{C}(v) := \bigcup_{l=1}^{\lambda} \bigcup_{p=2}^q C_{l,p}^1(v).$$

Offensichtlich gilt

$$C_{l,p}^1(v) \cap C_{l,p+1}^1(v) = \begin{cases} \{P_{q-p,p,0}^{[l]}\}, & \text{falls } e_l \text{ nicht degeneriert ist,} \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.6)$$

Auf der Vereinigung der C^1 -Mengen einer degenerierten Kante e_l ist es somit besonders einfach, eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(K)$ anzugeben, da die C^1 -Mengen paarweise disjunkt sind und wir somit $S_q^1(K)$ auf jeder der C^1 -Mengen separat bestimmen

können. Andererseits liegt in (4.6) auch der Grund dafür, warum es so schwierig ist, eine vollständige Charakterisierung der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^1(K)$ auf einem beliebigen Kegel anzugeben. Ist die innere Kante e_l eines Kegels nicht degeneriert, existieren genau vier verschiedene Möglichkeiten, drei BB-Punkte aus einer C^1 -Menge $C_{l,p}^1(v)$ so festzulegen, dass diese $S_q^1(K)$ auf $C_{l,p}^1(v)$ bestimmen. Betrachten wir zwei benachbarte C^1 -Mengen $C_{l,p}^1(v)$ und $C_{l,p+1}^1(v)$, so sind fünf BB-Punkte notwendig, um $S_q^1(K)$ auf der Vereinigung der beiden C^1 -Mengen eindeutig zu bestimmen. In diesem Fall ergeben sich bereits zwölf verschiedene minimal bestimmende Mengen. Schon dieses einfache Beispiel zeigt, dass selbst die Angabe der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^1(K)$ auf der Vereinigung der C^1 -Mengen einer nicht degenerierten Kante eine nicht triviale Aufgabe darstellt. Beachten wir außerdem, dass für benachbarte Kanten e_l und e_{l+1} die C^1 -Mengen $C_{l,2}^1(v)$ und $C_{l+1,2}^1(v)$ einen gemeinsamen Punkt besitzen, so wird deutlich, dass es sich bei der vollständigen Charakterisierung der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^1(K)$ um ein komplexes Problem handelt.

Bei der Konstruktion der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^1(K)$ auf $\mathcal{C}(v)$ nutzen wir die besondere Struktur dieser Menge aus. Wir werden dazu $\mathcal{C}(v)$ in geeignete Teilmengen zerlegen, so dass die Beschreibung der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^1(K)$ auf jeder der Teilmengen ein weniger komplexes Problem darstellt und andererseits die Ergebnisse sinnvoll zu einer Charakterisierung der minimal bestimmenden Mengen auf dem ganzen Kegel zusammengefügt werden können.

An diesem Punkt müssen wir uns mit der Frage beschäftigen, wie diese Teilmengen von $\mathcal{C}(v)$ zu wählen sind, so dass sie den obigen Ansprüchen genügen. Untersuchen wir die Beziehungen, die zwischen den C^1 -Mengen bestehen, so sehen wir, dass die benachbarten C^1 -Mengen $C_{l,2}^1(v)$ und $C_{l+1,2}^1(v)$ genau einen gemeinsamen BB-Punkt besitzen. Ist die Kante e_l nicht degeneriert, besitzen die Mengen $C_{l,p}^1(v)$ und $C_{l,p+1}^1(v)$ ebenfalls genau einen gemeinsamen BB-Punkt. Ansonsten sind die C^1 -Mengen paarweise disjunkt. Insbesondere gilt somit, dass im Fall der nicht degenerierten Kegel im Gegensatz zum degenerierten Fall die Beziehungen auf der Gesamtheit der BB-Punkte der Menge $\mathcal{C}(v)$ komplexer sind.

Abbildung 4.3 veranschaulicht diese Beziehungen zwischen den C^1 -Mengen eines nicht degenerierten Kegels K , wobei zwei C^1 -Mengen, die einen gemeinsamen BB-Punkt besitzen, durch eine Kante miteinander verbunden sind. Bei den folgenden Überlegungen beschränken wir uns auf nicht degenerierte Kegel, da diese bzgl. der Frage der Zerlegung der Vereinigung der C^1 -Mengen gegenüber degenerierten Kegeln den schwierigeren Fall darstellen.

Bei der Zerlegung von $\mathcal{C}(v)$ in Teilmengen ist es erstrebenswert, möglichst große und gleichartige Teilmengen zu erhalten. Betrachten wir das Diagramm in Abbildung 4.3, so bedeutet diese Forderung, dass wir aus dem Diagramm möglichst wenige Kanten entfernen.

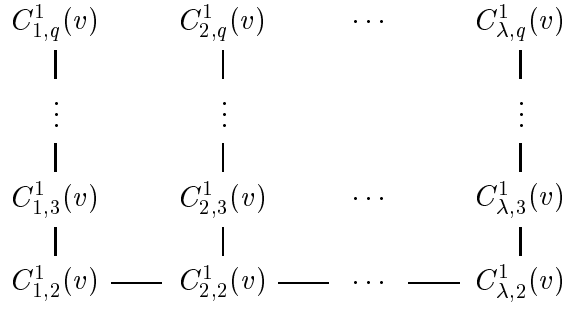


Abb. 4.3: Die Beziehungen der C^1 -Mengen auf dem Kegel K . Je zwei C^1 -Mengen, die durch eine Kante verbunden sind, besitzen einen gemeinsamen Bernstein-Bézier-Punkt.

Das Entfernen einer Kante ist dabei wie folgt zu verstehen: Die durch das Entfernen der Kante entstehenden Teilmengen enthalten nach der Zerlegung beide den gemeinsamen BB-Punkt, so dass die Teilmengen stets vollständige C^1 -Mengen enthalten. Dies hat den Vorteil, dass die durch die C^1 -Stetigkeitsbedingungen gegebenen Beziehungen der BB-Punkte untereinander, weitestgehend berücksichtigt werden.

Bei einer disjunkten Zerlegung hingegen würde der gemeinsame BB-Punkt zweier C^1 -Mengen bereits durch die Zerlegung eindeutig einer der beiden Teilmengen zugeordnet, so dass C^1 -Mengen zerstört werden und die geltenden C^1 -Stetigkeitsbedingungen nicht mehr klar erkennbar sind. Des Weiteren beinhaltet eine Zerlegung in disjunkte Teilmengen indirekt schon eine Auswahl der möglichen C^1 -Stetigkeitsbedingungen, durch welche $S_q^1(K)$ auf einem gemeinsamen BB-Punkt bestimmt werden soll, so dass eine vollständige Charakterisierung erschwert wird. Im Gegensatz zu der disjunkten Zerlegung muss bei den von uns gewählten nicht disjunkten Zerlegungen erst bei der Zusammensetzung der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^1(K)$ auf diesen Teilmengen entschieden werden, welche der beteiligten minimal bestimmenden Mengen $S_q^1(K)$ auf dem gemeinsamen BB-Punkt bestimmen soll. Offensichtlich gestaltet sich die Zusammensetzung der Teilergebnisse umso schwieriger, je mehr BB-Punkte aus einer C^1 -Menge auch in anderen Teilmengen enthalten sind. Zusammenfassend muss somit eine geeignete Zerlegung von $\mathcal{C}(v)$ die folgenden Anforderungen erfüllen:

- (i) Die Zerlegung soll $\mathcal{C}(v)$ in möglichst große und gleichartige Teilmengen unterteilen.
- (ii) Die Zerlegung soll so geartet sein, dass jede der C^1 -Mengen möglichst wenige gemeinsame BB-Punkte mit den Teilmengen von $\mathcal{C}(v)$, in denen sie nicht enthalten ist, hat.

Vor diesem Hintergrund legt das Diagramm in Abbildung 4.3 zwei offensichtliche Ansätze nahe, um die C^1 -Mengen zu Teilmengen von $\mathcal{C}(v)$ zu gruppieren:

- (1) Für $l = 1, \dots, \lambda$ betrachten wir die Menge $\{P : P \in C_{l,p}^1(v), p = 2, \dots, q\}$,
- (2) Für $l = 1, \dots, \lambda$ betrachten wir die Menge $\{P : P \in C_{l,p}^1(v), p = 3, \dots, q\}$ sowie die Menge $\{P : P \in C_{l,2}^1(v), l = 1, \dots, \lambda\}$.

Abbildung 4.4 veranschaulicht diese beiden Zerlegungen. C^1 -Mengen die durch eine Kante verbunden sind, bilden hierbei eine Teilmenge von $\mathcal{C}(v)$.

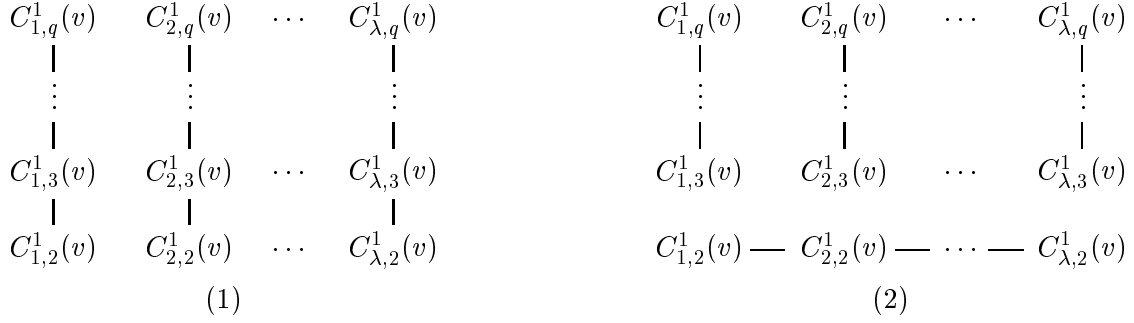


Abb. 4.4: Zwei mögliche Unterteilungen von $\mathcal{C}(v)$.

Da die durch die C^1 -Stetigkeitsbedingungen gegebene Struktur auf den Mengen $\{P : P \in C_{l,p}^1(v), p = 3, \dots, q\}$ und $\{P : P \in C_{l,2}^1(v), l = 1, \dots, \lambda\}$ für einen nicht degenerierten Kegel identisch ist, können wir die beiden Zerlegungen bzgl. der Bedingung (i) als gleichwertig betrachten. Bei der Entscheidung für eine der beiden Zerlegungen ist somit einerseits die Anzahl der C^1 -Mengen, die einen gemeinsamen BB-Punkt mit einer Teilmenge der Zerlegung haben, in der sie nicht enthalten sind, ausschlaggebend. Andererseits spielt aber auch die Anzahl der BB-Punkte, die in mehr als einer Teilmenge enthalten sind, eine Rolle. Hierbei liegt das größere Gewicht auf dem zweiten Kriterium, da sich die Zusammensetzung der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^1(K)$ auf den Teilmengen umso komplexer gestaltet, je mehr BB-Punkte aus einer C^1 -Menge in anderen Teilmengen enthalten sind. Betrachten wir die beiden Zerlegungen vor diesem Hintergrund, so ist die Zerlegung (2) zu bevorzugen. Denn in Zerlegung (1) enthalten fast alle in Frage kommenden C^1 -Mengen zwei BB-Punkte, die auch in anderen Teilmengen der Zerlegung liegen. Zerlegung (2) dagegen besitzt nur C^1 -Mengen, die maximal einen BB-Punkt mit einer anderen Teilmenge gemeinsam haben. Im Folgenden geben wir deshalb eine vollständige Beschreibung der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^1(\Delta)$ auf den Teilmengen der Zerlegung (2).

4.1.1 C^1 -Mengen entlang einer Kante

Gegeben sei ein Kegel K mit λ inneren Kanten, $\lambda \geq 1$. Es sei e_l , $1 \leq l \leq \lambda$, eine beliebige innere Kante von K . Dann definieren wir

$$R_1(e_l) := \begin{cases} \{P : P \in C_{l,p}^1(v), p = 3, \dots, q\} \cup \{P_{0,q,0}^{[l]}\}, & e_l \text{ ist bzgl. } v \text{ degeneriert,} \\ \{P : P \in C_{l,p}^1(v), p = 3, \dots, q\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.7)$$

Im Folgenden konstruieren wir eine Menge $\mathcal{M}_{3,q}^1(e_l)$ von Teilmengen von $R_1(e_l)$. Wir werden zeigen, dass $\mathcal{M}_{3,q}^1(e_l)$ die Menge aller minimal bestimmenden Mengen von $S_q^1(K)$ auf $R_1(e_l)$ ist.

Offensichtlich gilt

$$\dim S_q^1(K)|_{R_1(e_l)} = \begin{cases} 2q - 3, & \text{falls } e_l \text{ bzgl. } v_l \text{ nicht degeneriert ist,} \\ 2q - 4, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.8)$$

Ist die Kante e_l bzgl. v oder bzgl. des Eckpunkts v_l degeneriert, sind die C^1 -Mengen $C_{l,p}^1(v)$, $p = 3, \dots, q$, paarweise disjunkt. Bei der Wahl einer minimal bestimmenden Menge müssen wir daher lediglich eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(K)$ auf jeder der C^1 -Mengen wählen. Die Vereinigung dieser BB-Punkte ergibt dann eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(K)$ auf $\{P : P \in C_{l,p}^1(v), p = 3, \dots, q\}$.

Ist die Kante e_l nicht degeneriert, kann eine bestimmende Menge von $S_q^1(K)$ auf $R_1(e_l)$ aus jeder der Mengen $C_{l,p}^1(v)$ maximal drei BB-Punkte enthalten, da ansonsten $S_q^1(K)$ überbestimmt ist. Aus der Dimensionsformel (4.8) folgt ferner, dass für jede minimal bestimmende Menge von $S_q^1(K)$ auf $R_1(e_l)$ mindestens ein Index p , $3 \leq p \leq q$, existiert, so dass die minimal bestimmende Menge genau drei BB-Punkte aus $C_{l,p}^1(v)$ enthält. Existiert hingegen für $q \geq 5$ ein \tilde{p} mit $3 < \tilde{p} < q$, so dass die minimal bestimmende Menge nur einen BB-Punkt aus $C_{l,\tilde{p}}^1(v)$ enthält, so folgt aus der Dimensionsformel (4.8), dass es mindestens zwei weitere C^1 -Mengen gibt, aus denen die minimal bestimmende Menge genau drei BB-Punkte enthält. Ausgehend von diesen Überlegungen definieren wir nun $\mathcal{M}_{3,q}^1(e_l)$ als die folgende Menge von Teilmengen von $R_1(e_l)$. Wir beschreiben $\mathcal{M}_{3,q}^1(e_l)$ implizit durch die Mengen, die in $\mathcal{M}_{3,q}^1(e_l)$ enthalten sind.

Definition von $\mathcal{M}_{3,q}^1(e_l)$:

Fall 1: e_l ist bzgl. v_l degeneriert.

Es gilt $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{3,q}^1(e_l)$ genau dann, wenn \mathcal{A} für $p = 3, \dots, q$ genau zwei BB-Punkte aus $C_{l,p}^1(v)$ enthält.

Fall 2: e_l ist bzgl. v degeneriert.

Es gilt $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{3,q}^1(e_l)$ genau dann, wenn \mathcal{A} für $p = 3, \dots, q$ genau zwei BB-Punkte aus $C_{l,p}^1(v)$ sowie ferner den BB-Punkt $P_{0,q,0}^{[l]}$ enthält.

Fall 3: e_l ist nicht degeneriert.

Es gilt $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{3,q}^1(e_l)$ genau dann, wenn \mathcal{A} wie folgt definiert ist. Es sei $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < \lfloor (q-1)/2 \rfloor$. Ferner seien für $j = 1, \dots, k$ Indizes p_j gegeben, so dass $3 \leq p_1 < \dots < p_k \leq q$ gelte. Gilt $k > 1$, dann seien Indizes \tilde{p}_j , $j = 1, \dots, k-1$, gegeben, so dass gilt

$$p_j < \tilde{p}_j < p_{j+1}, \quad j = 1, \dots, k-1.$$

\mathcal{A} enthält die folgenden BB-Punkte:

(4.9) drei BB-Punkte aus $C_{l,p_j}^1(v)$, $j = 1, \dots, k$,

(4.10) zwei BB-Punkte aus $C_{l,p}^1(v) \setminus C_{l,p+1}^1(v)$ für $p = 3, \dots, p_1 - 1$, falls $p_1 > 3$,

(4.11) zwei BB-Punkte aus $C_{l,p}^1(v) \setminus C_{l,p-1}^1(v)$ für $p = p_k + 1, \dots, q$, falls $p_k < q$.

Falls $k \geq 2$ gilt, enthält \mathcal{A} zusätzlich

(4.12) einen BB-Punkt aus $C_{l,\tilde{p}_j}^1(v) \setminus (C_{l,\tilde{p}_j-1}^1(v) \cup C_{l,\tilde{p}_j+1}^1(v))$ für $j = 1, \dots, k-1$,

(4.13) zwei BB-Punkte aus $C_{l,p}^1(v) \setminus C_{l,p-1}^1(v)$ für $p_j < p < \tilde{p}_j$ und $j = 1, \dots, k-1$ und

(4.14) zwei BB-Punkte aus $C_{l,p}^1(v) \setminus C_{l,p+1}^1(v)$ für $\tilde{p}_j < p < p_{j+1}$ und $j = 1, \dots, k-1$.

Abbildung 4.5 zeigt eine Menge $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{3,q}^1(e_l)$ für eine nicht degenerierte Kante e_l und $q = 8$.

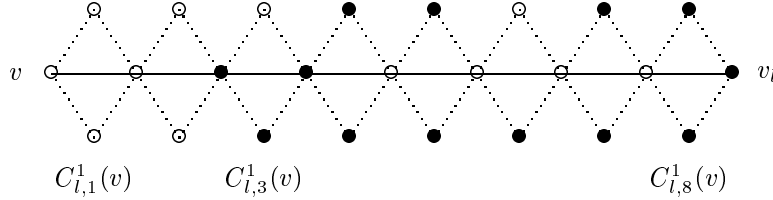


Abb. 4.5: Die BB-Punkte \bullet bilden eine Menge $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{3,8}^2(e_l)$ wobei $k = 2$, $p_1 = 4$, $\tilde{p}_1 = 6$ und $p_2 = 8$ gilt.

Das folgende Theorem besagt, dass $\mathcal{M}_{3,q}^1(e_l)$ die minimal bestimmenden Mengen von $S_q^1(K)$ auf $R_1(e_l)$ vollständig charakterisiert.

Theorem 4.4. *Sei $q \geq 3$. \mathcal{A} ist genau dann eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(K)$ auf $R_1(e_l)$, wenn $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{3,q}^1(e_l)$ gilt.*

Beweis. Sei $q \geq 3$ und es sei $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{3,q}^1(e_l)$. Nach Konstruktion gilt:

$$|\mathcal{A}| = \begin{cases} 2q - 3, & \text{falls } e_l \text{ bzgl. } v_l \text{ nicht degeneriert ist,} \\ 2q - 4, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit (4.8) erhalten wir $|\mathcal{A}| = \dim S_q^1(K)|_{R_1(e_l)}$. Somit bleibt zu zeigen, dass \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_q^1(K)$ auf $R_1(e_l)$ ist. Mit Theorem 2.4 folgt dann, dass \mathcal{A} auch minimal ist. Sei $s \in S_q^1(K)$ und es gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}$. Dann ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in R_1(e_l)$ gilt.

Fall 1: e_l ist degeneriert. Nach Definition von \mathcal{A} folgt aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen auf $C_{l,p}^1(v)$ für $p = 3, \dots, q$ direkt $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in R_1(e_l)$.

Fall 2: e_l ist nicht degeneriert. Für \mathcal{A} und $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k < \lfloor (q-1)/2 \rfloor$, seien p_j , $j = 1, \dots, k$, sowie \tilde{p}_j , $j = 1, \dots, k-1$, falls $k \geq 2$, wie oben definiert.

Es gelte zunächst $k = 1$. Nach Voraussetzung enthält \mathcal{A} drei BB-Punkte aus $C_{l,p_1}^1(v)$, so dass aus der C^1 -Stetigkeitsbedingung auf $C_{l,p_1}^1(v)$ $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in C_{l,p_1}^1(v)$ folgt. Gilt $q > 3$, enthält \mathcal{A} ferner die BB-Punkte (4.10) und (4.11), so dass nach sukzessiver Anwendung der C^1 -Stetigkeitsbedingung für $p = p_1 - 1, \dots, 3$ und $p = p_1 + 1, \dots, q$ $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in R_1(e_l)$ folgt.

Sei nun $k \geq 2$. Dann folgt mit (4.13) und (4.14) analog zum Fall $k = 1$, dass

$$\lambda_P s = 0, \quad P \in C_{l,p}^1(v), \quad p = 3, \dots, q, \quad p \notin \{\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{k-1}\} \quad (4.15)$$

gilt. Es bleibt somit zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in C_{l,\tilde{p}_j}^1(v)$, $j = 1, \dots, k-1$, gilt. Wegen (4.15) gilt $\lambda_P s = 0$, $P \in \{P_{q-\tilde{p}_j,\tilde{p}_j,0}^{[l]}, P_{q-\tilde{p}_j+1,\tilde{p}_j-1,0}^{[l]}\}$, $j = 1, \dots, k-1$. Da \mathcal{A} die BB-Punkte (4.14) enthält, folgt aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen auf $C_{l,\tilde{p}_j}^1(v)$ für $j = 1, \dots, k-1$ die Behauptung.

Wir zeigen nun, dass für jede beliebige minimal bestimmende Menge \mathcal{A} von $S_q^1(K)$ auf $R_1(e_l)$ $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{3,q}^1(e_l)$ gilt. Sei also \mathcal{A} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(K)$ auf $R_1(e_l)$.

Fall 1: e_l ist degeneriert.

Die C^1 -Mengen $C_{l,p}^1(v)$, $p = 3, \dots, q$, sind paarweise disjunkt. Aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen folgt somit, dass \mathcal{A} aus jeder der C^1 -Mengen genau zwei BB-Punkte enthalten muss, um $S_q^1(K)$ eindeutig auf $\{P : P \in C_{l,p}^1(v), p = 3, \dots, q\}$ zu bestimmen. Ist e_l bzgl. v degeneriert, so muss ferner $P_{0,q,0}^{[l]} \in \mathcal{A}$ gelten. Dann gilt aber genau $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{3,q}^1(e_l)$.

Fall 2: e_l ist nicht degeneriert.

Wir werden zeigen, dass ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < \lfloor (q-1)/2 \rfloor$ und Indizes p_j , $j = 1, \dots, k$, sowie \tilde{p}_j , $j = 1, \dots, k-1$ für $k \geq 2$, existieren, so dass \mathcal{A} genau aus den BB-Punkten (4.9) bis (4.11) bzw. (4.9) bis (4.14) besteht.

\mathcal{A} ist eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(K)$ auf $R_1(e_l)$. Somit enthält \mathcal{A} für $p = 3, \dots, q$ mindestens einen und höchstens drei BB-Punkte aus $C_{l,p}^1(v)$. Nach Voraussetzung gilt $|\mathcal{A}| = 2q - 3$, so dass mindestens ein Index p^* existiert, so dass \mathcal{A} genau drei BB-

Punkte aus $C_{l,p^*}^1(v)$ enthält. Sei ν , $1 \leq \nu \leq q-2$, die Anzahl der C^1 -Mengen in $\{C_{l,p}^1(v) : p = 3, \dots, q\}$, aus denen \mathcal{A} drei BB-Punkte enthält. Dann seien die Indizes $3 \leq t_1 < \dots < t_\nu \leq q$ definiert durch $|\mathcal{A} \cap C_{l,t_j}^1(v)| = 3$, $j = 1, \dots, \nu$. Wir benötigen die folgenden Hilfsbehauptungen.

- (A) \mathcal{A} ist auf jeder der Teilmengen $\{P : P \in C_{l,p}^1(v), p = 3, \dots, t_1\}$, $\{P : P \in C_{l,p}^1(v), p = t_\nu, \dots, q\}$ sowie für $\nu \geq 2$ auf $\{P : P \in C_{l,p}^1(v), p = t_i, \dots, t_j\}$, $1 \leq i < j \leq \nu$, eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(K)$.
- (B) Ist $S_q^1(K)$ auf $C_{l,p-1}^1(v)$ bestimmt, dann enthält \mathcal{A} entweder einen oder zwei BB-Punkte aus $C_{l,p}^1(v) \setminus C_{l,p-1}^1(v)$.
- (C) Ist $S_q^1(K)$ auf $C_{l,p-1}^1(v)$ bestimmt und enthält \mathcal{A} genau zwei BB-Punkte aus $C_{l,p}^1(v) \setminus C_{l,p-1}^1(v)$, dann ist $S_q^1(K)$ auch auf $C_{l,p}^1(v)$ bestimmt.
- (D) Ist $S_q^1(K)$ auf $C_{l,p+1}^1(v)$ bestimmt, dann enthält \mathcal{A} entweder einen oder zwei BB-Punkte aus $C_{l,p}^1(v) \setminus C_{l,p+1}^1(v)$.
- (E) Ist $S_q^1(K)$ auf $C_{l,p+1}^1(v)$ bestimmt und enthält \mathcal{A} genau zwei BB-Punkte aus $C_{l,p}^1(v) \setminus C_{l,p+1}^1(v)$, dann ist $S_q^1(K)$ auch auf $C_{l,p}^1(v)$ bestimmt.
- (F) Ist $S_q^1(K)$ auf $C_{l,p-1}^1(v)$ und $C_{l,p+1}^1(v)$ bestimmt, dann enthält \mathcal{A} genau einen BB-Punkt aus $C_{l,p}^1(v) \setminus (C_{l,p-1}^1(v) \cup C_{l,p+1}^1(v))$, und $S_q^1(K)$ ist auch auf $C_{l,p}^1(v)$ bestimmt.
- (G) Ist $t_1 > 3$, dann enthält \mathcal{A} für $p = 3, \dots, t_1 - 1$ genau zwei BB-Punkte aus $C_{l,p}^1(v) \setminus C_{l,p+1}^1(v)$.
- (H) Ist $t_\nu < q$, dann enthält \mathcal{A} für $p = t_\nu + 1, \dots, q$ genau zwei BB-Punkte aus $C_{l,p}^1(v) \setminus C_{l,p-1}^1(v)$.
- (I) Ist für $\tilde{t}_1 < \tilde{t}_2$ $S_q^1(K)$ auf $C_{l,\tilde{t}_1-1}^1(v)$ und $C_{l,\tilde{t}_2+1}^1(v)$ bestimmt und enthält \mathcal{A} aus $C_{l,\tilde{t}_1}^1(v) \setminus C_{l,\tilde{t}_1-1}^1(v)$ sowie aus $C_{l,\tilde{t}_2}^1(v) \setminus C_{l,\tilde{t}_2+1}^1(v)$ genau einen BB-Punkt, dann existiert mindestens ein t^* mit $\tilde{t}_1 < t^* < \tilde{t}_2$, so dass \mathcal{A} drei BB-Punkte aus $C_{l,t^*}^1(v)$ enthält.
- (J) Sei $j \in \{1, \dots, \nu - 1\}$, dann existiert maximal ein p mit $t_j < p < t_{j+1}$, so dass \mathcal{A} genau einen BB-Punkt aus $C_{l,p}^1(v)$ enthält.
- (K) Gilt $t_j = t_{j-1} + 1$ für gegebenes $j \in \{2, \dots, \nu\}$, dann enthält \mathcal{A} genau zwei BB-Punkte aus $C_{l,t_j}^1(v) \setminus C_{l,t_{j-1}}^1(v)$.

Beweis von (A). Sei $t \in \{t_1, \dots, t_\nu\}$, dann enthält \mathcal{A} nach Voraussetzung drei BB-Punkte aus $C_{l,t}^1(v)$, d. h. $S_q^1(K)$ ist auf allen Punkten von $C_{l,t}^1(v)$ eindeutig bestimmt. Damit lässt sich $S_q^1(K)$ auf $C_{l,t-1}^1(v)$ und $C_{l,t+1}^1(v)$ unabhängig voneinander bestimmen.

Für $\tau_1, \tau_2 \in \{t_1, \dots, t_\nu\}$, $\tau_1 < \tau_2$, folgt somit, dass jede minimal bestimmende Menge von $S_q^1(K)$ auf $\{P : P \in C_{l,p}^1(v), p = 3, \dots, q\}$ bereits eine bestimmende Menge von $S_q^1(K)$ auf $\{P : P \in C_{l,p}^1(v), p = \tau_1, \dots, \tau_2\}$ ist. Des Weiteren gilt, dass \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_q^1(K)$ auf $\{P : P \in C_{l,p}^1, p = 3, \dots, t_1\}$ und $\{P : P \in C_{l,p}^1, p = t_\nu, \dots, q\}$ ist. Setzen wir $t_0 := 3$ und $t_{\nu+1} := q$, so gilt für $j = 0, \dots, \nu$

$$|\mathcal{A} \cap \{P : P \in C_{l,p}^1(v), p = t_j, \dots, t_{j+1}\}| \geq 2(t_{j+1} - t_j) + 3. \quad (4.16)$$

Wegen $|\mathcal{A}| = 2q - 3$ gilt in (4.16) die Gleichheit, d. h. \mathcal{A} ist auf jeder Teilmenge eine minimal bestimmende Menge. \square

Die Hilfsbehauptungen (B) bis (F) folgen direkt aus der Tatsache, dass eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(K)$ auf $R_1(e_l)$ maximal drei BB-Punkte aus einer C^1 -Menge $C_{l,p}^1(v)$ enthält. \square

Beweis von (G). Aus (A) folgt, dass \mathcal{A} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(K)$ auf $\{P : P \in C_{l,p}^1(v), p = 3, \dots, t_1\}$ ist. Somit gilt

$$|\mathcal{A} \cap \{P : P \in C_{l,p}^1(v), p = 3, \dots, t_1\}| = 2t_1 - 3. \quad (4.17)$$

Ist $t_1 = 3$, so folgt mit (4.17) bereits die Behauptung.

Sei nun $t_1 > 3$. Nach Voraussetzung enthält \mathcal{A} genau drei BB-Punkte aus $C_{l,t_1}^1(v)$ und entweder einen oder zwei BB-Punkte aus $C_{l,p}^1(v)$ für $p = 3, \dots, t_1 - 1$. Somit gilt

$$|\mathcal{A} \cap C_{l,t_1}^1(v)| = 3 \quad \text{und} \quad (4.18)$$

$$|\mathcal{A} \cap \{P : P \in C_{l,p}^1(v), p = 3, \dots, t_1 - 1\}| \leq 2t_1 - 6. \quad (4.19)$$

Wegen (4.17) folgt aus (4.18) und (4.19)

$$|\mathcal{A} \cap (C_{l,t_1}^1(v) \setminus C_{l,t_1-1}^1(v))| = 3 \quad \text{und} \quad (4.20)$$

$$|\mathcal{A} \cap \{P : P \in C_{l,p}^1(v), p = 3, \dots, t_1 - 1\}| = 2t_1 - 6. \quad (4.21)$$

Nach Voraussetzung erhalten wir somit

$$|\mathcal{A} \cap C_{l,p}^1(v)| = 2, \quad p = 3, \dots, t_1 - 1. \quad (4.22)$$

Insbesondere folgt aus (4.18) und (4.20), dass $C_{l,t_1}^1(v) \cap C_{l,t_1-1}^1(v) = \{P_{q-t_1+1, t_1-1, 0}^{[l]}\} \not\subseteq \mathcal{A}$ ist. Für $t_1 = 4$ folgt damit die Behauptung.

Sei nun $t_1 \geq 5$.

Annahme: Es existiert ein $\tilde{p} \in \{3, \dots, t_1 - 2\}$, so dass $C_{l,\tilde{p}}^1(v) \cap C_{l,\tilde{p}+1}^1(v) = \{P_{q-\tilde{p}, \tilde{p}, 0}^{[l]}\} \subset \mathcal{A}$ gilt.

Mit (4.22) erhalten wir $|\mathcal{A} \cap (C_{l,\tilde{p}}^1(v) \cup C_{l,\tilde{p}+1}^1(v))| = 3$, so dass im Widerspruch zu (4.21) $|\mathcal{A} \cap \{P : P \in C_{l,p}^1(v), p = 3, \dots, t_1 - 1\}| = 2t_1 - 7$ gilt. Für $p = 3, \dots, t_1 - 1$ folgt

somit $P_{q-p,p,0}^{[l]} \notin \mathcal{A}$, und mit (4.22) erhalten wir $|\mathcal{A} \cap (C_{l,p}^1(v) \setminus C_{l,p+1}^1(v))| = 2$ für alle $p = 3, \dots, t_1 - 1$. \square

Beweis von (H). Die Behauptung folgt analog zu dem Beweis von (G). \square

Beweis von (I). \mathcal{A} erfülle die Voraussetzungen der Behauptung (I). Offensichtlich muss $\tau_2 > \tau_1 + 1$ gelten. O.B.d.A. können wir davon ausgehen, dass es kein p mit $\tau_1 < p < \tau_2$ gibt, so dass $|\mathcal{A} \cap C_{l,p}^1(v)| = 1$ gilt.

Annahme: Es gilt $|\mathcal{A} \cap C_{l,p}^1(v)| = 2$ für alle $p = \tau_1 + 1, \dots, \tau_2 - 1$.

Dann folgt $|\mathcal{A} \cap \{P : P \in C_{l,p}^1(v), p = \tau_1, \dots, \tau_2\}| \leq 2(\tau_2 - \tau_1) + 2$. Da aber

$$\dim S_q^1(K)|_{\{P: P \in C_{l,p}^1(v), p=\tau_1, \dots, \tau_2\}} = 2(\tau_2 - \tau_1) + 3$$

gilt, folgt die Behauptung. \square

Beweis von (J). Die Behauptung folgt direkt aus (I). \square

Beweis von (K). Für festes $j \in \{2, \dots, \nu\}$ sei $t_j = t_{j-1} + 1$. Dann ist zu zeigen, dass $C_{l,t_j}^1(v) \cap C_{l,t_{j-1}}^1(v) = \{P_{q-t_{j-1},t_{j-1},0}^{[l]}\} \subset \mathcal{A}$. Wegen (A) gilt

$$|\mathcal{A} \cap (C_{t_j}^1(v) \cup C_{t_{j-1}}^1(v))| = 5. \quad (4.23)$$

Annahme: Es gilt $P_{q-t_{j-1},t_{j-1},0}^{[l]} \notin \mathcal{A}$.

Dann enthält \mathcal{A} nach Voraussetzung sowohl drei BB-Punkte aus $C_{l,t_j}^1(v) \setminus C_{l,t_{j-1}}^1(v)$ als auch drei BB-Punkte aus $C_{l,t_{j-1}}^1(v) \setminus C_{l,t_j}^1(v)$, und es gilt im Widerspruch zu (4.23) $|\mathcal{A} \cap (C_{n_j}^1(v) \cup C_{n_{j-1}}^1(v))| = 6$. \square

Wir definieren nun eine Teilmenge $\{p_1, \dots, p_k\}$ der Indexmenge $\{t_1, \dots, t_\nu\}$, so dass gilt:

- (i) $p_1 = t_1$,
- (ii) $p_j > p_{j-1}$, $j = 2, \dots, k$, und
- (iii) $p_j - 1 \notin \{t_1, \dots, t_\nu\}$, $j = 2, \dots, k$.

Die Forderungen (i) - (iii) legen die Indexmenge $\{p_1, \dots, p_k\}$ in eindeutiger Weise fest. Wir betrachten nun \mathcal{A} auf den Teilmengen $\{P : P \in C_{l,p}^1(v), p = 3, \dots, p_1\}$, $\{P : P \in C_{l,p}^1(v), p = p_k, \dots, q\}$, sowie für $k > 1$ und $j = 1, \dots, k - 1$ auf den Teilmengen $\{P : P \in C_{l,p}^1(v), p = p_j, \dots, p_{j+1}\}$. Wir werden zeigen, dass für $k = 1$ \mathcal{A} aus den BB-Punkten (4.9) bis (4.11) besteht und für $k \geq 2$ und geeigneten Indizes \tilde{p}_j , $j = 1, \dots, k - 1$, \mathcal{A} aus den BB-Punkten (4.9) bis (4.14) besteht.

Sei zunächst $k = 1$ und $3 \leq p_1 \leq q$. Dann folgt mit (G) und (H) direkt, dass \mathcal{A} die Vereinigung von BB-Punkten (4.9) bis (4.11) ist.

Sei nun $k \geq 2$. Mit (G) und (H) folgt, dass \mathcal{A} aus $\{P : P \in C_{l,p}^1(v), 3 \leq p \leq p_1 \text{ oder } p_k \leq p \leq q\}$ genau $3 + 2(p_1 - 3) + 2(q - p_k)$ BB-Punkte enthält, die einer Wahl von BB-Punkten (4.9) bis (4.11) entsprechen. Sei $j \in \{1, \dots, k-1\}$. Dann genügt zu zeigen, dass ein Index \tilde{p}_j mit $p_j < \tilde{p}_j < p_{j+1}$, existiert, so dass \mathcal{A} genau einen BB-Punkt aus $C_{l,\tilde{p}_j}^1(v) \setminus (C_{l,p_j-1}^1(v) \cup C_{l,\tilde{p}_j+1}^1(v))$ enthält, für $p_j < p < \tilde{p}_j$ genau zwei BB-Punkte aus $C_{l,p}^1(v) \setminus C_{l,p-1}^1(v)$ und für $\tilde{p}_j < p < p_{j+1}$ genau zwei BB-Punkte aus $C_{l,p}^1(v) \setminus C_{l,p+1}^1(v)$ enthält. Wegen (J) müssen wir für $\{P : P \in C_{l,p}^1(v), p = p_j, \dots, p_{j+1}\}$ nur die folgenden beiden Fälle betrachten:

- (i) Es existiert kein \tilde{p}_j mit $p_j < \tilde{p}_j < p_{j+1}$, so dass \mathcal{A} genau einen BB-Punkt aus $C_{l,\tilde{p}_j}^1(v)$ enthält.
- (ii) Es existiert genau ein \tilde{p}_j mit $p_j < \tilde{p}_j < p_{j+1}$, so dass \mathcal{A} genau einen BB-Punkt aus $C_{l,\tilde{p}_j}^1(v)$ enthält.

Zu (i): Aus (B) und (C) folgt nach Voraussetzung, dass \mathcal{A} für $p = p_j + 1, \dots, p_{j+1} - 2$ zwei BB-Punkte aus $C_{l,p}^1(v) \setminus C_{l,p-1}^1(v)$ enthält. Wegen (F) gilt dann des Weiteren, dass \mathcal{A} genau einen BB-Punkt aus $C_{l,p_{j+1}-1}^1(v) \setminus (C_{l,p_{j+1}-2}^1(v) \cap C_{l,p_{j+1}}^1(v))$ enthalten muss. Mit $\tilde{p}_j := p_{j+1} - 1$ folgt die Behauptung.

Zu (ii): Sei $p_j < \tilde{p}_j < p_{j+1}$. \mathcal{A} enthalte genau einen BB-Punkt aus $C_{l,\tilde{p}_j}^1(v)$. Nach Voraussetzung gilt dann für alle p mit $p_j < p < p_{j+1}$, $p \neq \tilde{p}_j$, $|\mathcal{A} \cap C_{l,p}^1(v)| = 2$. Mit (A) gilt, dass \mathcal{A} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(K)$ auf $\{P : P \in C_{l,p}^1(v), p = p_j, \dots, p_{j+1}\}$ ist. Nach Voraussetzung folgt dann aus Dimensionsgründen, dass \mathcal{A} genau $2(p_{j+1} - p_j - 2)$ BB-Punkte aus $\{P : P \in C_{l,p}^1(v), p = p_j + 1, \dots, p_{j+1} - 1, p \neq \tilde{p}_j\}$ enthält. Analog zum Beweis von (I) folgt dann aus Gründen der Anzahl, dass $C_{l,p}^1(v) \cap C_{l,p-1}^1(v) = \{P_{q-p+1,p-1,0}^{[l]}\} \not\subset \mathcal{A}$ für $p_j < p < \tilde{p}_j$ und $C_{l,p}^1(v) \cap C_{l,p+1}^1(v) = \{P_{q-p,p,0}^{[l]}\} \not\subset \mathcal{A}$ für $p_j < p < p_{j+1}$ gilt. D. h. es gilt

$$\begin{aligned} |\mathcal{A} \cap (C_{l,p}^1(v) \setminus C_{l,p-1}^1(v))| &= 2, & p_j < p < \tilde{p}_j, \\ |\mathcal{A} \cap (C_{l,p}^1(v) \setminus C_{l,p+1}^1(v))| &= 2, & \tilde{p}_j < p < p_{j+1}, \end{aligned}$$

und nach Voraussetzung erhalten wir ferner

$$|\mathcal{A} \cap (C_{l,\tilde{p}_j}^1(v) \setminus (C_{l,\tilde{p}_j-1}^1(v) \cup C_{l,\tilde{p}_j+1}^1(v)))| = 1. \quad \blacksquare$$

Nachdem wir die minimal bestimmenden Mengen von $S_q^1(K)$ auf der Vereinigung der Mengen $C_{l,p}^1$, $p = 3, \dots, q$, für eine beliebige innere Kante vollständig charakterisiert haben, betrachten wir im Folgenden $S_q^1(K)$ auf der Vereinigung der C^1 -Mengen um einen Eckpunkt.

4.1.2 C^1 -Mengen um einen Eckpunkt

Gegeben sei ein beliebiger Kegel K mit Scheitelpunkt v und λ inneren Kanten, $\lambda \geq 1$. Für $q \geq 3$ wir definieren

$$D_2^*(v) := (D_2(v) \cap \mathcal{B}_q(K)) \setminus \{P_{q-2,2,0}^{[l]} : 1 \leq l \leq \lambda, e_l \text{ ist bzgl. } v \text{ degeneriert}\}. \quad (4.24)$$

In diesem Abschnitt konstruieren wir minimal bestimmende Mengen von $S_q^1(K)$ auf $D_2^*(v)$. Wir gehen davon aus, dass $S_q^1(K)$ auf $R_1(K)$ bereits bestimmt ist. Ist \mathcal{B}_K^* eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(K)$ auf $R_1(K) \cap D_2^*$, konstruieren wir genauer gesagt Teilmengen von $\{P : P \in C_{l,2}^1(v), l = 1, \dots, \lambda\}$ so, dass diese vereinigt mit \mathcal{B}_K^* minimal bestimmende Mengen von $S_q^1(K)$ auf $D_2^*(v)$ ergeben.

Im Unterschied zu der Charakterisierung der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^1(K)$ auf den C^1 -Mengen entlang einer inneren Kante von K müssen wir nun beachten, dass die inneren Kanten von K sowohl nicht degeneriert als auch degeneriert sein können. Dementsprechend kann die Menge $\{P : P \in C_{l,2}^1(v), l = 1, \dots, \lambda\}$ sowohl nicht degenerierte als auch degenerierte C^1 -Mengen enthalten.

Es sei

$$d_v := \text{die Anzahl der Kanten aus } \{e_1, \dots, e_\lambda\}, \text{ die bzgl. } v \text{ degeneriert sind.} \quad (4.25)$$

Mit (2.10) erhalten wir

$$\dim S_q^1(K)|_{D_2^*(v)} = 6 + \lambda - d_v. \quad (4.26)$$

Für $q \geq 3$ konstruieren wir eine Menge $\mathcal{M}_{1,\lambda}^1(v)$ von Teilmengen von $\{P : P \in C_{l,2}^1(v), l = 1, \dots, \lambda\}$. Wir werden zeigen, dass $\mathcal{M}_{1,\lambda}^1(v)$ die Teilmengen von $D_2^*(v)$, deren Vereinigung mit \mathcal{B}_K^* eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(K)$ auf $D_2^*(v)$ ergibt, vollständig charakterisiert.

Definition von $\mathcal{M}_{1,\lambda}^1(v)$:

Fall 1: Es gilt $\lambda \leq 2$ und $d_v \in \{\lambda - 1, \lambda\}$, oder es gilt $\lambda = 3$ und $d_v = 2$.

Es gilt $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{M}_{1,\lambda}^1(v)$ genau dann, wenn $\mathcal{A}_0 = \emptyset$ ist.

Fall 2: Es gilt $\lambda \geq 2$ und $d_v \leq \lambda - 2$.

Es gilt $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{M}_{1,\lambda}^1(v)$ genau dann, wenn \mathcal{A}_0 wie folgt definiert ist. Es sei $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < \lfloor (\lambda - 1 - d_v)/2 \rfloor$ gegeben. Dann seien für $j = 1, \dots, k$ Indizes l_j so gegeben, dass $1 \leq l_1 < \dots < l_k \leq \lambda$ gilt. Ist $k > 1$, dann seien für $j = 1, \dots, k - 1$ Indizes l_j^* so gegeben, dass $e_{l_j^*}$ bzgl. v nicht degeneriert ist und ferner $l_j < l_j^* < l_{j+1}$ für $j = 1, \dots, k - 1$ gilt.

\mathcal{A}_0 enthalte

(4.27) einen BB-Punkt aus $\{P_{q-2,2,0}^{[1]}, P_{q-2,1,1}^{[2]}\}$, falls $l_1 = 1$ gilt und e_1 bzgl. v nicht degeneriert ist,

(4.28) einen BB-Punkt aus $\{P_{q-2,2,0}^{[\lambda]}, P_{q-2,1,1}^{[\lambda]}\}$, falls $l_k = \lambda$ gilt und e_λ bzgl. v nicht degeneriert ist,

(4.29) zwei BB-Punkte aus $\{P_{q-2,2,0}^{[l_j]}, P_{q-2,1,1}^{[l_j]}, P_{q-2,1,1}^{[l_j+1]}\}$, falls e_{l_j} bzgl. v nicht degeneriert ist, bzw. einen BB-Punkt aus $\{P_{q-2,1,1}^{[l_j]}, P_{q-2,1,1}^{[l_j+1]}\}$, falls e_{l_j} bzgl. v degeneriert ist, $j = 1, \dots, k$ und $1 < l_j < \lambda$,

(4.30) einen BB-Punkt aus $\{P_{q-2,2,0}^{[l]}, P_{q-2,1,1}^{[l+1]}\}$, falls $l_1 > 1$ gilt und e_l bzgl. v nicht degeneriert ist, $1 < l < l_1$,

(4.31) einen BB-Punkt aus $\{P_{q-2,2,0}^{[l]}, P_{q-2,1,1}^{[l]}\}$, falls $l_k < \lambda$ gilt und e_l bzgl. v nicht degeneriert ist, $l_k < l < \lambda$.

Gilt $k \geq 2$, dann enthalte \mathcal{A}_0 des Weiteren

(4.32) einen BB-Punkt aus $\{P_{q-2,2,0}^{[l]}, P_{q-2,1,1}^{[l+1]}\}$, falls e_l bzgl. v nicht degeneriert ist, für $l_j < l < l_j^*$ und $j = 1, \dots, k-1$,

(4.33) einen BB-Punkt aus $\{P_{q-2,2,0}^{[l]}, P_{q-2,1,1}^{[l]}\}$, falls e_l bzgl. v nicht degeneriert ist, für $l_j^* < l < l_j + 1$ und $j = 1, \dots, k-1$.

Sei \mathcal{B}_K^* eine beliebige minimal bestimmende Menge von $S_q^1(K)$ auf $R_1(K) \cap D_2^*(v)$. Das folgende Theorem gibt eine vollständige Charakterisierung der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^1(K)$ auf $D_2^*(v)$, die \mathcal{B}_K^* enthalten, an.

Theorem 4.5. *Sei $q \geq 3$. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{B}_K^*$ ist genau dann eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(K)$ auf $D_2^*(v)$, wenn $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{M}_{1,\lambda}^1(v)$ gilt.*

Beweis. Sei $q \geq 3$. Es gilt $|\mathcal{B}_K^*| = 7$, falls v nicht semisingulär ist, und $|\mathcal{B}_K^*| = 6$ sonst. Nach Konstruktion von \mathcal{A}_0 folgt

$$|\mathcal{A}_0| = \begin{cases} \lambda - 1 - d_v, & \text{falls } v \text{ nicht semisingulär ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist v semisingulär, gilt $\lambda = d_v$. Mit (2.10) erhalten wir somit

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}_K^*| + |\mathcal{A}_0| = 6 + \lambda - d_v = S_q^1(K)|_{D_2^*(v)}.$$

Können wir zeigen, dass \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_q^1(K)$ auf $D_2^*(v)$ ist, folgt aus Theorem 2.4, dass \mathcal{A} minimal ist.

Sei $s \in S_q^1(K)$ und es gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}$. Dann genügt zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in D_2^*(v)$ gilt. Wegen $\mathcal{B}_K^* \subset \mathcal{A}$ folgt direkt

$$\lambda_P s = 0, \quad P \in R_1(K) \cap D_2^*(v). \quad (4.34)$$

Fall 1: Es gilt $\lambda \leq 2$ und $d_v \in \{\lambda - 1, \lambda\}$, oder es gilt $\lambda = 3$ und $d_v = 2$.

Für $\lambda = d_v$ gilt $D_2^*(v) \subset R_1(K)$. Aus (4.34) folgt dann direkt die Behauptung. Gilt $\lambda = 1$ und $d_v = 0$, folgt die Behauptung mit (4.34) aus der C^1 -Stetigkeitsbedingung auf $C_{1,2}^1(v)$. Es gelte nun $\lambda = 2$ und $d_v = 1$. O.B.d.A. sei e_1 bzgl. v degeneriert. Mit (4.34) folgt aus der C^1 -Stetigkeitsbedingung auf $C_{1,2}^1(v)$ zunächst $\lambda_P s = 0$, $P \in D_2^*(v) \setminus \{P_{q-2,2,0}^{[2]}\}$. Aus der C^1 -Stetigkeitsbedingung auf $C_{2,2}^1(v)$ erhalten wir dann $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in D_2^*(v)$. Ist e_2 bzgl. v degeneriert, folgt die Behauptung analog. Gilt $\lambda = 3$ und $d_v = 2$, seien o.B.d.A. e_1 und e_2 bzgl. v degeneriert. Mit (4.34) folgt nach sukzessiver Anwendung der C^1 -Stetigkeitsbedingungen $\lambda_P s = 0$, $P \in C_{1,2}^1(v) \cup C_{2,2}^1(v)$. Aus der C^1 -Stetigkeitsbedingung auf $C_{1,3}^1(v)$ folgt dann $\lambda_P s = 0$, $P \in D_2^*(v)$. Sind e_2 und e_3 bzgl. v degeneriert, folgt die Behauptung analog.

Fall 2: Es gilt $\lambda \geq 2$ und $d_v \leq \lambda - 2$.

Aus (4.34) folgt insbesondere

$$\lambda_P s = 0, \quad P \in \{P_{q-1,1,0}^{[l]} : l = 1, \dots, \lambda\} \cup \{P_{q-2,1,1}^{[1]}, P_{q-2,1,1}^{[\lambda+1]}\}. \quad (4.35)$$

Unter Berücksichtigung, dass eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(K)$ auf $D_2^*(v)$ maximal einen BB-Punkt aus $\{P_{q-2,2,0}^{[l]}, P_{q-2,2,0}^{[l+1]}\}$ für eine bzgl. v degenerierte Kante e_l enthalten darf, folgt mit (4.35) analog zum Beweis von Theorem 4.4, dass \mathcal{A} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(K)$ auf $D_2^*(v)$ ist.

Sei nun $\mathcal{A} = \mathcal{B}_K^* \cup \mathcal{A}_0$ eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(K)$ auf $D_2^*(v)$. Dann folgt analog zum Beweis von Theorem 4.4, dass $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{M}_{1,\lambda}^1(v)$ gilt. Dabei ist insbesondere zu beachten, dass im Fall $d_v > 0$ und $k > 1$ für $j = 1, \dots, k-1$ die Kante $e_{l_j}^*$ bzgl. v nicht degeneriert sein darf, da ansonsten $S_q^1(K)$ auf allen drei BB-Punkten aus $C_{l_j^*,2}^1(v)$ unabhängig voneinander bestimmt und somit überbestimmt wäre. ■

4.2 Beliebige Kegel

Gegeben sei eine Teiltriangulierung $\tilde{\Delta} \subset \Delta$ und es sei $v \in V_I$ ein beliebiger Randpunkt von $\tilde{\Delta}$. Es sei K der Kegel von v bzgl. $\tilde{\Delta}$, und K besitze λ innere Kanten, $\lambda \geq 1$. Die Dreiecke, Kanten und Eckpunkte von K seien wie in Abbildung 4.1 nummeriert. Im Folgenden geben wir sowohl für nicht semisinguläre Eckpunkte bzgl. $\tilde{\Delta}$ als auch für semisinguläre Eckpunkte bzgl. $\tilde{\Delta}$ eine Charakterisierung der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^1(\tilde{\Delta}_K)$, $q \geq 3$,

auf $\mathcal{B}_q(K)$ an, wobei wir voraussetzen, dass $S_q^1(\tilde{\Delta}_K)$ auf $\mathcal{B}_q(\tilde{\Delta}) \cup R_1(K)$ bereits eindeutig bestimmt ist. Dabei sei $R_1(K)$ wie in (4.2) gegeben, falls v nicht semisingulär vom Typ II ist. Anderenfalls sei $R_1(K)$ wie in (4.3) definiert.

Es sei v zunächst nicht semisingulär bzgl. $\tilde{\Delta}$. Sei $\tilde{\mathcal{A}}$ eine beliebige minimal bestimmende Menge von $S_q^1(\tilde{\Delta})$, $q \geq 3$. Unter Verwendung der Resultate aus dem vorherigen Abschnitt geben wir im Folgenden für $q \geq 3$ eine vollständige Charakterisierung der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^1(\tilde{\Delta}_K)$, die $\tilde{\mathcal{A}}$ enthalten, an. Es sei d_v wie in (4.25) definiert. Nach Voraussetzung gilt $d_v < \lambda$.

Konstruktion minimal bestimmender Mengen:

Für $\lambda \geq 2$ sei ein festes μ mit $0 \leq \mu \leq \lambda - 1 - d_v$ gegeben. Für $\mu \geq 1$ seien Indizes \tilde{l}_j , $j = 1, \dots, \mu$, so gegeben, dass die Kanten $e_{\tilde{l}_j}$ nicht degeneriert sind. In Abhängigkeit von λ und im Fall $\mu \geq 1$ in Abhängigkeit von \tilde{l}_j , $j = 1, \dots, \mu$, definieren wir Mengen \mathcal{A}_l , $l = 0, \dots, \lambda$.

Fall 1: Es gilt $\lambda = 1$, oder es gilt $\lambda \geq 2$ und $\mu = 0$.

Dann sei $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{M}_{1,\lambda}^1(v)$. Für $l = 1, \dots, \lambda$ sei ferner $\mathcal{A}_l^* \in \mathcal{M}_{3,q}^1(e_l)$, wobei $P_{q-2,2,0}^{[l]} \in \mathcal{A}_l^*$ gelte, falls e_l bzgl. v nicht degeneriert ist. Wir definieren für $l = 1, \dots, \lambda$

$$\mathcal{A}_l := \begin{cases} \mathcal{A}_l^* \setminus \{P_{q-2,2,0}^{[l]}\}, & \text{falls } e_l \text{ bzgl. } v \text{ nicht degeneriert ist,} \\ \mathcal{A}_l^*, & \text{falls } e_l \text{ bzgl. } v \text{ degeneriert ist.} \end{cases}$$

Fall 2: Es gilt $\lambda \geq 2$ und $\mu \geq 1$.

Sei $\mathcal{A}_0^* \in \mathcal{M}_{1,\lambda}^1(v)$ so gegeben, dass $\{P_{q-2,2,0}^{[\tilde{l}_j]} : j = 1, \dots, \mu\} \subset \mathcal{A}_0^*$ gilt. Dann setzen wir

$$\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}_0^* \setminus \{P_{q-2,2,0}^{[\tilde{l}_j]} : j = 1, \dots, \mu\}.$$

Für $l = 1, \dots, \lambda$ sei $\mathcal{A}_l^* \in \mathcal{M}_{3,q}^1(e_l)$ gegeben, so dass $P_{q-2,2,0}^{[l]} \in \mathcal{A}_l^*$ für $l \neq \tilde{l}_j$, $j = 1, \dots, \mu$, gilt und ferner e_l nicht degeneriert ist. Dann setzen wir für $l = 1, \dots, \lambda$

$$\mathcal{A}_l := \begin{cases} \mathcal{A}_l^* \setminus \{P_{q-2,2,0}^{[l]}\}, & \text{falls } l \notin \{\tilde{l}_j : j = 1, \dots, \mu\} \text{ und } e_l \text{ nicht degeneriert ist,} \\ \mathcal{A}_l^*, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir definieren

$$\mathcal{A}_K = \bigcup_{l=0}^{\lambda} \mathcal{A}_l \cup \mathcal{M} \tag{4.36}$$

mit $\mathcal{M} = \emptyset$, falls $q = 3$ gilt, und mit $\mathcal{M} = \{P_{i,j,k}^{[l]} : j, k \geq 2, l = 1, \dots, \lambda + 1\}$, falls $q \geq 4$ gilt.

Es sei $\tilde{\mathcal{A}}$ eine beliebige minimal bestimmende Menge von $S_q^1(\tilde{\Delta})$.

Theorem 4.6. *Sei $q \geq 3$. $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}} \cup \mathcal{A}_K$ ist genau dann eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(\tilde{\Delta}_K)$, wenn \mathcal{A}_K von der in (4.36) gegebenen Form ist.*

Beweis. Sei $q \geq 3$. Nach Konstruktion von \mathcal{A} gilt mit Korollar 4.2

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| &= |\tilde{\mathcal{A}}| + |\mathcal{A}_K| = \dim S_q^1(\tilde{\Delta}) + \lambda(2q-3) - 1 + (\lambda+1) \frac{(q-3)(q-2)}{2} \\ &= \dim S_q^1(\tilde{\Delta}) + \lambda \frac{q(q-1)}{2} + \frac{(q-2)(q-3)}{2} - 1 = \dim S_q^1(\tilde{\Delta}_K), \end{aligned}$$

Ist \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_q^1(\tilde{\Delta}_K)$, folgt aus Theorem 2.4, dass \mathcal{A} auch minimal ist.

Sei $s \in S_q^1(\tilde{\Delta}_K)$ und es gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}$. Es ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_q(\tilde{\Delta}_K)$ gilt. Offensichtlich gilt

$$\mathcal{B}_q(\tilde{\Delta}_K) = \mathcal{B}_q(\tilde{\Delta}) \cup R_1(K) \cup \mathcal{M} \cup \left(\bigcup_{l=1}^{\lambda} \bigcup_{p=2}^q C_{l,p}^1(v) \right).$$

Wegen $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ erhalten wir direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_q(\tilde{\Delta})$. Aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen an den Randkanten von $\tilde{\Delta}$ sowie am Eckpunkt v folgt somit $\lambda_P s = 0$, $P \in R_1(K)$. Aus den Theoremen 4.4 und 4.5 erhalten wir ferner, dass $\lambda_P s = 0$, $P \in \{P : P \in C_{l,p}^1(v), l = 1, \dots, \lambda, p = 2, \dots, q\}$ gilt. Wegen $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ folgt dann $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_q(\tilde{\Delta}_K)$, d. h. \mathcal{A} ist eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(\tilde{\Delta}_K)$.

Sei nun \mathcal{A} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(\tilde{\Delta}_K)$, so dass $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ gilt. Dann definieren wir $\mathcal{A}_K := \mathcal{A} \setminus \tilde{\mathcal{A}}$. Gilt $\lambda = 1$, folgt aus den Theoremen 4.4 und 4.5 direkt, dass \mathcal{A}_K die in (4.36) gegebene Form besitzen muss.

Für $\lambda \geq 2$ definieren wir $\mathcal{A}_l := \mathcal{A}_K \cap R_1(e_l)$, $l = 1, \dots, \lambda$, wobei $R_1(e_l)$ wie in (4.7) gegeben ist. Sei $D_2^*(v)$ wie in (4.24) definiert. Ist für $l \in \{1, \dots, \lambda\}$ die Kante e_l degeneriert, dann gilt offensichtlich $\mathcal{A}_l \cap D_2^*(v) = \emptyset$. Aus Theorem 4.4 folgt somit direkt $\mathcal{A}_l \in \mathcal{M}_{3,q}^1(v)$.

Sei nun e_l , $l \in \{1, \dots, \lambda\}$, nicht degeneriert.

Annahme: Es gilt sowohl $\mathcal{A}_l \notin \mathcal{M}_{3,q}^1(v)$ als auch $\mathcal{A}_l \cup \{P_{q-2,2-0}^{[l]}\} \notin \mathcal{M}_{3,q}^1(v)$.

Da nach Annahme weder \mathcal{A}_l noch $\mathcal{A}_l \cup \{P_{q-2,2-0}^{[l]}\}$ eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(\tilde{\Delta}_K)$ auf $R_1(e_l)$ ist, gibt es mindestens einen BB-Punkt $P \in R_1(e_l)$, so dass $S_q^1(\tilde{\Delta}_K)$ durch $\mathcal{A} \setminus R_1(e_l)$ auf P bestimmt ist. Es gilt

$$\begin{aligned} R_1(e_l) \cap \{P : P \in C_{l,2}^1(v), 1 \leq l \leq \lambda\} &= \{P_{q-2,2,0}^{[l]}\}, \\ R_1(e_l) \cap R_1(K) &= \emptyset, \\ R_1(e_l) \cap \mathcal{M} &= \emptyset \\ \text{und } R_1(e_l) \cap R_1(e_{\tilde{l}}) &= \emptyset, \quad \tilde{l} = 1, \dots, \lambda, \tilde{l} \neq l. \end{aligned}$$

Somit muss $P = P_{q-2,2,0}^{[l]}$ gelten. Nach Annahme gilt aber $\mathcal{A}_l \cup \{P_{q-2,2,0}^{[l]}\} \notin \mathcal{M}_{3,q}^1(v)$, so dass mit Theorem 4.4 folgt, dass \mathcal{A} im Widerspruch zur Voraussetzung keine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(\tilde{\Delta}_K)$ ist.

Somit folgt für $l = 1, \dots, \lambda$, dass entweder $\mathcal{A}_l \in \mathcal{M}_{3,q}^1(v)$ oder $\mathcal{A}_l \cup \{P_{q-2,2,0}^{[l]}\} \in \mathcal{M}_{3,q}^1(v)$ gilt. Wir betrachten nun $\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}_K \cap D_2^*(v)$. Mit Theorem 4.5 folgt $|\mathcal{A}_0| \leq \lambda - 1 - d_v$. Gilt $|\mathcal{A}_0| = \lambda - 1 - d_v$, dann folgt mit Theorem 4.5 direkt $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{M}_{1,\lambda}^1(v)$. Gilt $|\mathcal{A}_0| < \lambda - 1 - d_v$, dann sei $\mu := \lambda - 1 - |\mathcal{A}^{(0)}|$. Nach Theorem 4.5 existieren dann μ BB-Punkte $P_1, \dots, P_\mu \in \{P_{q-2,j,k}^{[l]} : j+k=2, l=2, \dots, \lambda\} \setminus \mathcal{A}_0$, so dass $S_q^1(\tilde{\Delta}_K)$ durch $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_0$ auf diesen Punkten bestimmt ist und ferner $\mathcal{A}_0 \cup \{P_1, \dots, P_\mu\} \in \mathcal{M}_{1,\lambda}^1(v)$ gilt. Da

$$\mathcal{A}_0 \cap R_1(K) = \mathcal{A}_0 \cap \mathcal{M} = \emptyset$$

und

$$\mathcal{A}_0 \cap R_1(e_l) = \begin{cases} \{P_{q-2,2,0}^{[l]}\}, & \text{falls } e_l \text{ nicht degeneriert ist,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad l = 1, \dots, \lambda.$$

gilt, existieren μ Indizes $\tilde{l}_j \in \{1, \dots, \lambda\}$, so dass $e_{\tilde{l}_j}$ nicht degeneriert ist und $P_{q-2,2,0}^{[\tilde{l}_j]} \notin \mathcal{A}_0$ gilt, $j = 1, \dots, \mu$. Setzen wir $P_j = P_{q-2,2,0}^{[\tilde{l}_j]}$, $j = 1, \dots, \mu$, dann folgt bereits die Behauptung. ■

Wir betrachten nun den Fall, dass v semisingulär bzgl. $\tilde{\Delta}$ ist. Wir charakterisieren im Folgenden die minimal bestimmenden Mengen von $S_q^1(K)$, wobei wir voraussetzen, dass $S_q^1(K)$ bereits auf $R_1(K)$ eindeutig bestimmt ist.

Konstruktion minimal bestimmender Mengen:

Es gelte $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{M}_{1,\lambda}^1(v)$. Ferner gelte $\mathcal{A}_l \in \mathcal{M}_{3,q}^1(e_l)$, $l = 1, \dots, \lambda$. Dann definieren wir

$$\mathcal{A}_K = \bigcup_{l=0}^{\lambda} \mathcal{A}_l \cup \mathcal{M} \tag{4.37}$$

mit $\mathcal{M} = \emptyset$, falls $q = 3$ gilt, und mit $\mathcal{M} = \{P_{i,j,k}^{[l]} : j, k \geq 2, l = 1, \dots, \lambda + 1\}$, falls $q \geq 4$ gilt.

Es sei $\tilde{\mathcal{A}}$ eine beliebige minimal bestimmende Menge von $S_q^1(K)$ auf $R_1(K)$.

Theorem 4.7. *Sei $q \geq 3$. $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}} \cup \mathcal{A}_K$ ist genau dann eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(K)$, wenn \mathcal{A}_K von der in (4.37) gegebenen Form ist.*

Beweis. Sei $q \geq 3$. Nach Konstruktion von $\tilde{\mathcal{A}}$ und \mathcal{A}_K folgt mit (2.10)

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| &= |\tilde{\mathcal{A}}| + |\mathcal{A}_K| = 4q - 2 + \lambda(2q - 3) + (\lambda + 1) \frac{(q - 3)(q - 2)}{2} \\ &= \frac{(q + 1)(q + 2)}{2} + \lambda \frac{q(q - 1)}{2} = \dim S_q^1(K). \end{aligned}$$

Ist \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_q^1(K)$ auf $\mathcal{B}_q(K)$, folgt aus Theorem 2.4 bereits die Behauptung.

Sei $s \in S_q^1(K)$ und es gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}$. Dann ist es zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_q(K)$ gilt. Offensichtlich gilt

$$\mathcal{B}_q(K) = R_1(K) \cup \mathcal{M} \cup \left(\bigcup_{l=1}^{\lambda} R_1(e_l) \right),$$

wobei $R_1(e_l)$ wie in (4.7) gegeben ist. Wegen $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ folgt $\lambda_P s = 0$, $P \in R_1(K)$. Aus den Theoremen 4.4 erhalten wir ferner, dass $\lambda_P s = 0$, $P \in R_1(e_l)$, für $1 \leq l \leq \lambda$ gilt. Wegen $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ folgt dann bereits $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_q(K)$.

Sei nun \mathcal{A} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(K)$, so dass $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ gilt. Dann definieren wir $\mathcal{A}_K := \mathcal{A} \setminus \tilde{\mathcal{A}}$. Da für $1 \leq l \leq \lambda$ die Kante e_l bzgl. v degeneriert sind, folgt aus den Theoremen 4.4 und 4.5 direkt, dass \mathcal{A}_K von der in (4.37) gegebenen Form sein muss. ■

4.3 Standardzellen innerer Eckpunkte

Im Folgenden betrachten wir die Standardzelle Δ_v eines beliebigen inneren Eckpunkts v von Δ . Wir konstruieren für $q \geq 3$ allgemeine Klassen minimal bestimmender Mengen von $S_q^1(\Delta_v)$. Wir geben zunächst eine vollständige Charakterisierung der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^1(\Delta_v)$ für singuläre Eckpunkte an. Anschließend konstruieren wir für nicht singuläre Eckpunkte v drei große Klassen minimal bestimmender Mengen von $S_q^1(\Delta_v)$. Hierbei verwenden wir insbesondere die Charakterisierungen der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^1(\Delta)$ auf Kegeln sowie auf den in den Abschnitten 4.1.1 und 4.1.2 definierten Teilmengen. Im Folgenden sei v ein innerer Eckpunkt von Δ , und es gelte $\deg(v) = n$. Die Randpunkte und Dreiecke von Δ_v seien wie in Abbildung 4.6 gegen den Uhrzeigersinn mit v_l bzw. $T^{[l]}$, $l = 0, \dots, n-1$, nummeriert. Ferner sei $e_l = [v, v_l]$, $l = 0, \dots, n-1$.

Mit Theorem 2.6 gilt

$$\dim S_q^1(\Delta_v) = n \frac{q(q-1)}{2} + 3 + \sigma_v \quad (4.38)$$

wobei $\sigma_v = 1$ gilt, falls v singulär ist, und $\sigma_v = 0$, falls v nicht singulär ist.

Für einen beliebigen inneren Eckpunkt v definieren wir $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}_q(\Delta_v)$, $q \geq 3$, durch:

$$\mathcal{M} := \begin{cases} \emptyset & \text{für } q = 3, \\ \{P_{i,j,k}^{[l]} : j, k \geq 2, l = 0, \dots, n-1\} & \text{für } q \geq 4. \end{cases} \quad (4.39)$$

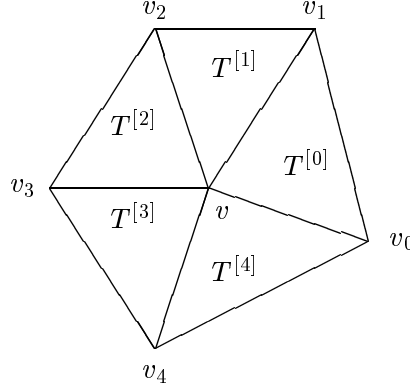


Abb. 4.6: Bezeichnung der Eckpunkte und Dreiecke von Δ_v , $\deg(v) = 5$.

Sei zunächst v ein singulärer Eckpunkt von Δ . Im Folgenden geben wir eine vollständige Charakterisierung der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^1(\Delta_v)$, $q \geq 3$, an.

Sei $D_2^*(v) \subset D_2(v)$ definiert durch

$$D_2^*(v) := D_2(v) \setminus \{P_{q-2,2,0}^{[l]} : l = 0, \dots, 3\}.$$

Wir beschreiben nun implizit eine Menge $\mathcal{M}_s^1(v)$ bestehend aus Teilmengen von $D_2^*(v)$.

Definition von $\mathcal{M}_s^1(v)$:

Es gilt $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{M}_s^1(v)$ genau dann, wenn \mathcal{A}_0 die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) $|\mathcal{A}_0| = 4$,
- (ii) $|\mathcal{A}_0 \cap C_{l,1}^1(v)| \leq 2$, $l = 0, 1$, und
- (iii) $|\mathcal{A}_0 \cap C_{l,2}^1(v)| \leq 2$, $l = 0, \dots, 3$.

Konstruktion minimal bestimmender Mengen:

Die Mengen $R_1(e_l)$ und $\mathcal{M}_{3,q}^1(e_l)$, $l = 0, \dots, 3$, seien wie in Abschnitt 4.1.1 gegeben. Dann definieren wir

$$\mathcal{A} := \bigcup_{l=0}^4 \mathcal{A}_l \cup \mathcal{M}, \tag{4.40}$$

wobei $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{M}_s^1(v)$ und $\mathcal{A}_l \in \mathcal{M}_{3,q}^1(e_{l-1})$, $l = 1, \dots, 4$, gelte.

Theorem 4.8. *Sei $q \geq 3$ und sei v ein singulärer Eckpunkt. \mathcal{A} ist genau dann eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(\Delta_v)$, wenn \mathcal{A} von der in (4.40) gegebenen Form ist.*

Beweis. Sei v ein singulärer Eckpunkt von Δ . Sei $q \geq 3$ und es gelte $s \in S_q^1(\Delta_v)$. Für $l = 1, \dots, 4$ sei $s|_{T[l]}$ in der BB-Darstellung (2.5) gegeben.

Sei \mathcal{A} von der in (4.40) gegebenen Form. Wir zeigen zunächst, dass \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_q^1(\Delta_v)$ ist. Es gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}$. Dann ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_q(\Delta_v)$ gilt. Aus Theorem 4.4 folgt direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in \cup_{l=0}^3 R_1(e_l) \cup \mathcal{M}$. Da

$$\mathcal{B}_q(\Delta_v) = D_2^*(v) \cup \cup_{l=0}^3 R_1(e_l) \cup \mathcal{M} \quad (4.41)$$

und $\mathcal{A}_0 \subset D_2^*(v)$ gilt, bleibt somit zu zeigen, dass gilt:

$$\lambda_P s = 0, \quad P \in \mathcal{A}_0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_P s = 0, \quad P \in D_2^*(v). \quad (4.42)$$

Beweis von (4.42).

Fall 1: Es gilt $|\mathcal{A}_0 \cap \{P_{q-2,1,1}^{[l]} : l = 0, \dots, 3\}| = 1$.

Da für $l = 0, \dots, 3$ maximal zwei BB-Punkte aus $C_{l,1}^1(v)$ und $C_{l,2}^1(v)$ in \mathcal{A}_0 liegen, enthält \mathcal{A}_0 genau drei nicht kollineare BB-Punkte aus $D_1(v)$. Somit folgt direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in D_1(v)$. Aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen auf $C_{l,2}^1(v)$ für $l = 0, \dots, 3$ folgt dann bereits (4.42).

Fall 2: Es gilt $|\mathcal{A}_0 \cap \{P_{q-2,1,1}^{[l]} : l = 0, \dots, 3\}| = 2$ und $|\mathcal{A}_0 \cap D_1(v)| = 2$.

O.B.d.A. enthalte \mathcal{A}_0 eine der drei folgenden Mengen $\{P_{q,0,0}^{[0]}, P_{q-1,1,0}^{[0]}\}$, $\{P_{q-1,1,0}^{[0]}, P_{q-1,1,0}^{[1]}\}$ oder $\{P_{q-1,1,0}^{[0]}, P_{q-1,1,0}^{[2]}\}$. Die anderen Fälle folgen wegen der Symmetrie auf $D_2^*(v)$ analog. Es gelte zunächst $\{P_{q,0,0}^{[0]}, P_{q-1,1,0}^{[0]}\} \subset \mathcal{A}_0$. Nach Voraussetzung gilt dann $\{P_{q-2,1,1}^{[l]}, P_{q-2,1,1}^{[l+2]}\} \subset \mathcal{A}$ für ein $l \in \{0, 1\}$. Aus der C^1 -Stetigkeitsbedingung auf $C_{0,1}^1(v)$ folgt $a_{q-1,1,0}^{[1]} = 0$. Aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen auf $C_{0,2}^1(v)$ und $C_{2,2}^1(v)$ erhalten wir die Behauptung. Es gelte nun $\{P_{q-1,1,0}^{[0]}, P_{q-1,1,0}^{[1]}\} \subset \mathcal{A}_0$. Nach Voraussetzung gilt $\{P_{q-2,1,1}^{[l]}, P_{q-2,1,1}^{[3]}\} \subset \mathcal{A}_0$ für ein $l \in \{0, 1, 2\}$. Nach sukzessiver Anwendung der C^1 -Stetigkeitsbedingungen auf $C_{l,2}^1(v)$ für $l = 0, \dots, 3$ erhalten wir $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in D_2^*(v) \setminus \{P_{q,0,0}^{[0]}\}$. Aus der C^1 -Stetigkeitsbedingung auf $C_{0,1}^1(v)$ folgt die Behauptung. Wir betrachten nun den Fall $\{P_{q-1,1,0}^{[0]}, P_{q-1,1,0}^{[2]}\} \subset \mathcal{A}_0$. Nach Voraussetzung enthält \mathcal{A}_0 entweder für ein $l \in \{0, 1\}$ die Menge $\{P_{q-2,1,1}^{[l]}, P_{q-2,1,1}^{[l+2]}\}$ oder eine der beiden Mengen $\{P_{q-2,1,1}^{[1]}, P_{q-2,1,1}^{[2]}\}$ und $\{P_{q-2,1,1}^{[2]}, P_{q-2,1,1}^{[0]}\}$. Aus der C^1 -Stetigkeitsbedingung auf $C_{1,1}^1(v)$ folgt direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in C_{1,1}^1(v)$. Nach sukzessiver Anwendung der C^1 -Stetigkeitsbedingungen auf $C_{l,2}^1(v)$ für $l = 0, \dots, 3$ folgt die Behauptung.

Fall 3: Es gilt $|\mathcal{A}_0 \cap \{P_{q-2,1,1}^{[l]} : l = 0, \dots, 3\}| = 3$.

O.B.d.A. gelte $\{P_{q-2,1,1}^{[l]} : l = 0, 1, 2\} \subset \mathcal{A}_0$. Die anderen Fälle folgen wegen der Symmetrie auf $D_2^*(v)$ analog. Aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen folgt direkt $a_{q-1,1,0}^{[0]} = a_{q-1,1,0}^{[1]} = 0$. Nach Voraussetzung enthält \mathcal{A} einen BB-Punkt aus $\{P_{q,0,0}^{[0]}, P_{q-1,1,0}^{[2]}, P_{q-1,1,0}^{[0]}\}$, so dass

aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen direkt $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in D_1(v)$ folgt. Aus der C^1 -Stetigkeitsbedingung auf $C_{3,2}^1(v)$ erhalten wir dann $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in D_2^*(v)$.

Fall 4: Es gilt $\{P_{q-2,1,1}^{[l]} : l = 0, \dots, 3\} \subseteq \mathcal{A}$.

Aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen auf $C_{l,2}^1(v)$ für $l = 0, \dots, 3$ erhalten wir $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in D_2^*(v) \setminus \{P_{q,0,0}^{[0]}\}$. Aus der C^1 -Stetigkeitsbedingung auf $C_{0,1}^1(v)$ folgt die Behauptung. \square

Es bleibt zu zeigen, dass \mathcal{A} minimal ist. Nach Konstruktion gilt $|\mathcal{A}| = 4 + 2q(q-1) = \dim S_q^1(\Delta_v)$. Aus Theorem 2.4 folgt dann bereits, dass \mathcal{A} minimal ist.

Sei nun \mathcal{A} eine beliebige minimal bestimmende Menge von $S_q^1(\Delta_v)$. Es ist zu zeigen, dass \mathcal{A} von der in (4.40) gegebenen Form ist. Wegen (4.41) muss $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ gelten. Für $l = 0, \dots, 3$ gilt nach Definition $R_1(e_l) \cap D_2^*(v) = \emptyset$, $R_1(e_l) \cap \mathcal{M} = \emptyset$ sowie $R_1(e_l) \cap R_1(e_k) = \emptyset$, $l \neq k$. Setzen wir $\mathcal{A}_l := \mathcal{A} \cap R_1(e_{l-1})$, $l = 1, \dots, 4$, folgt aus Theorem 4.4 $\mathcal{A}_l \in \mathcal{M}_{3,q}^1(e_{l-1})$. Sei $\mathcal{A}_0 := \mathcal{A} \cap D_2^*(v)$. Nach Voraussetzung ist \mathcal{A} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(\Delta_v)$. Somit folgt $|\mathcal{A}_0 \cap D_2^*(v)| = 4$. Aus (4.42) folgt, dass $\mathcal{M}_s^1(v)$ alle möglichen 4-elementigen Teilmengen von $D_2^*(v)$ enthält, die $S_q^1(\Delta_v)$ auf $D_2^*(v)$ eindeutig bestimmen. D. h. es gilt $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{M}_s^1(v)$ und \mathcal{A} ist von der in (4.40) gegebenen Form. \blacksquare

Nachdem wir die minimal bestimmenden Mengen von $S_q^1(\Delta_v)$, $q \geq 3$, für singuläre Eckpunkte vollständig charakterisiert haben, betrachten wir nun den Fall, dass v ein innerer, nicht singulärer Eckpunkt von Δ ist. Im Folgenden beschreiben wir drei allgemeine Klassen minimal bestimmender Mengen von $S_q^1(\Delta_v)$, $q \geq 3$.

Für die Standardzelle eines beliebigen inneren Eckpunkts gab Schumaker [59] eine spezielle minimal bestimmende Menge von $S_q^1(\Delta_v)$ an. Für ein Dreieck $T^{[l]}$ von Δ_v werden dazu alle BB-Punkte aus $\mathcal{B}_q(T^{[l]})$ gewählt. Die restlichen Dreiecke werden schrittweise durchlaufen. Dabei werden jeweils die BB-Punkte des aktuellen Dreiecks, auf denen $S_q^1(\Delta_v)$ noch nicht bestimmt ist, zur minimal bestimmenden Menge hinzugefügt. Beim Hinzufügen des letzten Dreiecks sind Sonderfälle zu beachten. Wir erhalten eine erste große Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_q^1(\Delta_v)$, indem wir die Vorgehensweise von Schumaker verallgemeinern. Für ein beliebiges Dreieck $T^{[l]}$ von Δ_v wählen wir alle BB-Punkte aus $\mathcal{B}_q(T^{[l]})$. Bei der Wahl der restlichen BB-Punkte betrachten wir den Kegel $\Delta_v \setminus T^{[l]}$. Mit Theorem 4.6 erhalten wir somit eine erste Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_q^1(\Delta_v)$.

Für $K := \Delta_v \setminus T^{[n-1]}$ sei die Menge \mathcal{A}_K wie in (4.36) gegeben. Dann gilt das folgende Theorem.

Theorem 4.9. *Sei $q \geq 3$ und sei v ein nicht singulärer Eckpunkt. Dann ist $\mathcal{A} = \mathcal{A}_K \cup \mathcal{B}_q(T^{[n-1]})$ eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(\Delta_v)$.*

Beweis. Für $q \geq 3$ sei $s \in S_q^1(\Delta_v)$. Wir zeigen zunächst, dass \mathcal{A} eine bestimmende Menge

von $S_q^1(\Delta_v)$ ist. Es gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}$. Dann ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_q(\Delta_v)$ gilt. Nach Voraussetzung ist v nicht singulär. K besitzt demnach mindestens eine innere Kante, die bzgl. v nicht degeneriert ist. Somit folgt, dass v bzgl. $T^{[n-1]}$ nicht semisingulär ist. Wir erhalten

$$\lambda_P s = 0, \quad P \in \mathcal{B}_q(T^{[n-1]}) \quad \Rightarrow \quad \lambda_P s = 0, \quad P \in R_1(K),$$

wobei $R_1(K)$ wie in (4.2) gegeben ist. Nach Definition von \mathcal{A}_K folgt aus Theorem 4.6, dass \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_q^1(\Delta_v)$ ist. Ferner ist \mathcal{A} minimal, denn es gilt $|\mathcal{A}| = n \frac{q(q-1)}{2} + 3 = \dim S_q^1(\Delta_v)$. ■

Bei der Konstruktion einer zweiten Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_q^1(\Delta_v)$ wählen wir statt eines Dreiecks eine beliebige Kante von Δ_v und bestimmen $S_q^1(\Delta_v)$ auf den C^1 -Mengen entlang dieser Kante. Wir nummerieren die Eckpunkte und Kanten von Δ_v so, dass e_0 diese Kante ist. Anschließend bestimmen wir $S_q^1(\Delta_v)$ auf dem Kegel, der entsteht, wenn wir Δ_v entlang der Kante e_0 „aufschneiden“.

Konstruktion minimal bestimmender Mengen:

Die Menge $\mathcal{M}_{1,q}^1(e_0)$ sei analog zu der Definition der Menge $\mathcal{M}_{3,q}^1(e_l)$ aus Abschnitt 4.1.1 definiert. Dann gelte $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{M}_{1,q}^1(e_0)$.

Für $K := \cup_{l=0}^{n-1} T^{[l]} \setminus e_0$ sei \mathcal{A}_K von der in (4.36) gegebenen Form.

Theorem 4.10. *Sei $q \geq 3$ und sei v ein nicht singulärer Eckpunkt. Dann ist $\mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_K$ eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(\Delta_v)$.*

Beweis. Sei $q \geq 3$ und es gelte $s \in S_q^1(\Delta_v)$. Ferner gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}$. Dann ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_q(\Delta)$ gilt. Wegen $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ folgt aus Theorem 4.4 $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \cup_{p=1}^q C_{0,p}^1(v) \cup \{P_{0,q,0}^{[1]}\}$. Da $\mathcal{A}_K \subset \mathcal{A}$ gilt, folgt dann aus Theorem 4.6 $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_q(\Delta_v)$. Ferner ist \mathcal{A} minimal, denn es gilt

$$|\mathcal{A}| = \frac{nq(q-1)}{2} + 3 = \dim S_q^1(\Delta_v). \quad \blacksquare$$

Wir konstruieren nun eine dritte Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_q^1(\Delta_v)$. Dazu bestimmen wir $S_q^1(\Delta_v)$ zuerst auf $D_2(v)$ und dann auf den Mengen $R_1(e_l)$, $l = 0, \dots, n-1$. Im Folgenden gelte

$$M_v := \{P_{q-2,2,0}^{[l]} : l = 0, \dots, n-1\}.$$

Alfeld, Piper und Schumaker [2] zeigten, dass die in den folgenden Lemmas beschriebenen Mengen minimal bestimmende Mengen von $S_q^1(\Delta_v)$, $q \geq 3$, auf $D_2(v)$ sind.

Lemma 4.11. *Sei v ein nicht singulärer Eckpunkt von Δ . Sei $l \in \{0, \dots, n-1\}$ so gegeben, dass e_l bzgl. v nicht degeneriert ist. $\mathcal{A} \subset D_2(v)$ enthalte drei nicht kollineare*

BB-Punkte aus $D_1(v)$, die BB-Punkte der Menge $M_v \setminus \{P_{q-2,2,0}^{[l]}\}$ sowie einen BB-Punkt aus $R_2(v) \setminus M_v$. Dann ist \mathcal{A} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(\Delta_v)$ auf $D_2(v)$.

Lemma 4.12. *Sei v ein nicht singulärer Eckpunkt und $n = \deg(v)$ ungerade. $\mathcal{A} \subset D_2(v)$ enthalte drei nicht kollineare BB-Punkte aus $D_1(v)$ sowie die BB-Punkte der Menge M_v . Dann ist \mathcal{A} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(\Delta_v)$ auf $D_2(v)$.*

Lemma 4.13. *Sei v ein nicht singulärer Eckpunkt von Δ und $n = \deg(v) = 4$. Die Eckpunkte von Δ_v seien so nummeriert, dass e_1 bzgl. v und e_2 bzgl. v_2 nicht degeneriert ist. $\mathcal{A} \subset D_2(v)$ enthalte die BB-Punkte $P_{q,0,0}^{[1]}$, $P_{q-1,1,0}^{[1]}$ und $P_{q-2,1,1}^{[1]}$ sowie die BB-Punkte der Menge M_v . Dann ist \mathcal{A} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(\Delta_v)$ auf $D_2(v)$.*

Wir betrachten nun spezielle Zellen Δ_v . Im Folgenden sei $\deg(v) \geq 6$ gerade. Ferner seien zwei benachbarte innere Kanten von Δ_v bzgl. v degeneriert. Diese Zellen spielen später bei der Angabe minimal bestimmender Mengen von $S_4^1(\Delta)$ auf beliebigen Triangulierungen eine besondere Rolle (vgl. Kapitel 6).

Sei zunächst v ein innerer Eckpunkt mit $n = \deg(v) = 6$. Die Kanten von Δ_v seien so nummeriert, dass e_1 und e_2 bzgl. v degeneriert sind. Ferner sei e_5 bzgl. v_5 nicht degeneriert. Dann gilt das folgende Lemma.

Lemma 4.14. *Sei $q \geq 3$. \mathcal{A} enthalte die BB-Punkte $P_{q,0,0}^{[2]}$, $P_{q-1,0,1}^{[2]}$ und $P_{q-2,1,1}^{[2]}$ sowie die BB-Punkte der Menge M_v . Dann ist \mathcal{A} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(\Delta_v)$ auf $D_2(v)$.*

Beweis. Die baryzentrischen Koordinaten φ_ν^i , $\nu = 1, 2, 3$, des Punktes v_{i+2} bzgl. des Dreiecks $T^{[i]}$ seien gegeben durch

$$v_{i+2} = \varphi_1^i v + \varphi_2^i v_{i+1} + \varphi_3^i v_i, \quad i = 0, \dots, 5. \quad (4.43)$$

Hierbei sowie im Folgenden sind die Indizes stets als Index modulo 6 zu verstehen. Aufgrund der Geometrie von Δ_v gilt

$$\varphi_3^i < 0, \quad i = 0, \dots, 5. \quad (4.44)$$

Mit (4.43) gilt dann

$$v_i = -\frac{\varphi_1^i}{\varphi_3^i} v - \frac{\varphi_2^i}{\varphi_3^i} v_{i+1} + \frac{1}{\varphi_3^i} v_{i+2}. \quad (4.45)$$

Des Weiteren gilt wegen $\prod_{i=0}^5 \varphi_3^i = 1$

$$\varphi_3^0 \varphi_3^1 \varphi_3^2 = \frac{1}{\varphi_3^3 \varphi_3^4 \varphi_3^5}. \quad (4.46)$$

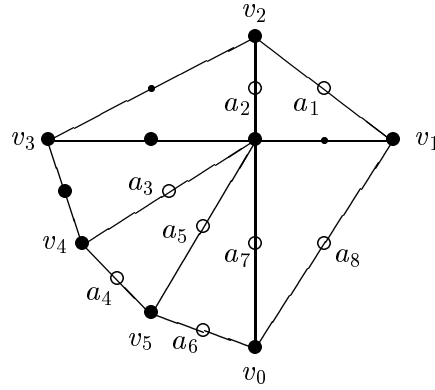


Abb. 4.7: Bezeichnungen der freien Bézier-Koeffizienten in $D_2(v)$, $n = 6$. \mathcal{A} besteht aus den BB-Punkten \bullet . Die Koeffizienten der BB-Punkte \bullet sind durch C^1 -Stetigkeitsbedingungen bestimmt.

Wir bezeichnen die noch freien Bézier-Koeffizienten, wie in Abb. 4.7 dargestellt, mit a_1, \dots, a_8 . Aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen erhalten wir das folgende homogene lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi_3^0 \\ \varphi_3^1 & \varphi_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_3^2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1^3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_2^3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_3^4 & \varphi_1^4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_3^4 & 0 & \varphi_2^4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi_3^5 & \varphi_1^5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{pmatrix} = 0.$$

Bezeichnen wir die obige Matrix mit M , dann gilt

$$\begin{aligned} \det M &= -\varphi_1^1 - \varphi_3^0 \varphi_3^1 \varphi_3^2 (\varphi_3^4 \varphi_1^5 + \varphi_2^3 \varphi_2^4 \varphi_1^5 + \varphi_2^3 \varphi_1^4 \varphi_3^5 + \varphi_1^3 \varphi_3^4 \varphi_3^5) \\ &\stackrel{(4.46)}{=} -\varphi_1^1 - \frac{\varphi_1^5 (\varphi_2^3 \varphi_2^4 + \varphi_3^4)}{\varphi_3^3 \varphi_3^4 \varphi_3^5} - \frac{\varphi_2^3 \varphi_1^4 + \varphi_1^3 \varphi_3^4}{\varphi_3^3 \varphi_3^4}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Seien v_i , $i = 0, 3, 4, 5$, in der Form (4.45) gegeben. Ersetzen wir in Gleichung (4.45) für $i = 3$ zunächst v_4 , dann v_5 und anschließend v_0 , so erhalten wir

$$\begin{aligned}
v_3 = & \left(-\frac{\varphi_1^5 (\varphi_2^3 \varphi_2^4 + \varphi_3^4)}{\varphi_3^3 \varphi_3^4 \varphi_3^5} + \frac{\varphi_2^3 \varphi_1^4 - \varphi_1^3 \varphi_3^4}{\varphi_3^3 \varphi_3^4} + \frac{\varphi_1^0 (\varphi_2^3 \varphi_3^5 + \varphi_2^5 \varphi_3^4 + \varphi_2^3 \varphi_2^4 \varphi_2^5)}{\varphi_3^0 \varphi_3^3 \varphi_3^4 \varphi_3^5} \right) v \\
& - \left(\frac{\varphi_2^3 \varphi_3^5 + \varphi_2^5 \varphi_3^4 + \varphi_2^3 \varphi_2^4 \varphi_2^5}{\varphi_3^0 \varphi_3^3 \varphi_3^4 \varphi_3^5} \right) v_2 \\
& + \left(\frac{\varphi_2^0 (\varphi_2^3 \varphi_3^5 + \varphi_2^5 \varphi_3^4 + \varphi_2^3 \varphi_2^4 \varphi_2^5)}{\varphi_3^0 \varphi_3^3 \varphi_3^4 \varphi_3^5} + \frac{\varphi_2^3 \varphi_2^4 + \varphi_3^4}{\varphi_3^3 \varphi_3^4 \varphi_3^5} \right) v_1.
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist e_2 bzgl. v degeneriert, d. h. es gilt

$$\varphi_2^1 = -\frac{\varphi_2^3 \varphi_3^5 + \varphi_2^5 \varphi_3^4 + \varphi_2^3 \varphi_2^4 \varphi_2^5}{\varphi_3^0 \varphi_3^3 \varphi_3^4 \varphi_3^5} = 0$$

und somit

$$\varphi_1^1 = -\frac{\varphi_1^5 (\varphi_2^3 \varphi_2^4 + \varphi_3^4)}{\varphi_3^3 \varphi_3^4 \varphi_3^5} + \frac{\varphi_2^3 \varphi_1^4 - \varphi_1^3 \varphi_3^4}{\varphi_3^3 \varphi_3^4}.$$

Dies in Gleichung (4.47) eingesetzt und vereinfacht ergibt

$$\det M = -2 \frac{\varphi_2^3 \varphi_1^4}{\varphi_3^3 \varphi_3^4}.$$

Nach Voraussetzung ist e_5 bzgl. v_5 nicht degeneriert, d. h. es gilt $\varphi_1^4 \neq 0$. Ferner gilt nach Voraussetzung $\varphi_2^3 > 0$, so dass mit (4.44) $\det M \neq 0$ folgt. D. h. \mathcal{A} ist eine bestimmende Menge von $S_q^1(\Delta_v)$ auf $D_2(v)$. Ferner gilt $|\mathcal{A}| = 9 = \dim S_q^1(\Delta_v)|_{D_2(v)}$, so dass daraus folgt, dass \mathcal{A} auch minimal ist. \blacksquare

Wir betrachten nun den Fall, dass v ein Eckpunkt geraden Grades mit $n = \deg(v) \geq 8$ ist. Ferner seien zwei benachbarte innere Kanten von Δ_v bzgl. v degeneriert. Wir nummerieren die Kanten von Δ_v so, dass e_1 und e_2 bzgl. v degeneriert sind. Es gelte entweder $\angle(v_{2i-2}, v_{2i-1}, v_{2i}) > 0$, $i = 3, \dots, n$, oder $\angle(v_{2i-2}, v_{2i-1}, v_{2i}) < 0$, $i = 3, \dots, n$. Dann gilt das folgende Lemma.

Lemma 4.15. *Sei $q \geq 3$. \mathcal{A} enthalte die BB-Punkte $P_{q,0,0}^{[2]}$, $P_{q-1,0,1}^{[2]}$ und $P_{q-2,1,1}^{[2]}$ sowie die BB-Punkte der Menge M_v . Dann ist \mathcal{A} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(\Delta_v)$ auf $D_2(v)$.*

Beweis. Im Folgenden sei $n \geq 8$, n gerade. Nach Konstruktion gilt $|\mathcal{A}| = n + 3 = \dim S_q^1(\Delta_v)|_{D_2(v)}$. Bestimmt \mathcal{A} $S_q^1(\Delta_v)$ auf $D_2(v)$, folgt daraus bereits, dass \mathcal{A} auch minimal ist.

Für $i = 0, \dots, n-1$ seien die baryzentrischen Koordinaten $\phi_\nu^{[i]}(w)$, $\nu = 1, 2, 3$, eines Punktes w bzgl. des Dreiecks $T^{[i]}$ gegeben durch

$$w = \phi_1^{[i]}(w) v + \phi_2^{[i]}(w) v_{i+1} + \phi_3^{[i]}(w) v_i.$$

Hierbei sowie im Folgenden sind die Indizes stets als Index modulo n zu verstehen. Für $i = 0, \dots, n-1$ und $\nu = 1, 2, 3$ setzen wir

$$\varphi_\nu^i := \phi_\nu^{[i]}(v_{i+2}).$$

Dann gilt offensichtlich

$$v_i = \varphi_1^{i-2} v + \varphi_2^{i-2} v_{i-1} + \varphi_3^{i-2} v_{i-2}. \quad (4.48)$$

Nach Voraussetzung ist keine der Kanten e_i , $i = 0, \dots, n-1$, bzgl. v_i degeneriert, so dass gilt:

$$\varphi_1^i \neq 0, \quad i = 0, \dots, n-1. \quad (4.49)$$

Ferner gilt aufgrund der Geometrie von Δ_v :

$$\varphi_2^0 = \varphi_2^1 = 0, \quad (4.50)$$

$$\varphi_2^i > 0, \quad i = 2, \dots, n-1, \quad (4.51)$$

$$\text{und } \varphi_3^i < 0, \quad i = 0, \dots, n-1. \quad (4.52)$$

Des Weiteren gilt

$$\sum_{i=0}^{n-1} \varphi_3^i = (-1)^n. \quad (4.53)$$

Bezeichnet g_i für $i = 0, \dots, n-1$ die Gerade im \mathbb{R}^2 , die durch die Eckpunkte v und v_i läuft, so gilt offensichtlich für $i = 4, \dots, n$, dass die Eckpunkte v_3 und v_{i+1} auf gegenüberliegenden Seiten von g_i liegen. Da g_i die Schnittgerade der Ebene $\phi_2^{[i]}$ mit dem \mathbb{R}^2 ist und ferner $\phi_2^{[i]}(v_{i+1}) = 1$ gilt (vgl. Abb. 2.3), folgt direkt

$$\phi_2^{[i]}(v_3) < 0, \quad i = 4, \dots, n. \quad (4.54)$$

Aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen folgt direkt $a_{q-1,0,1}^{[1]} = a_{q-2,1,1}^{[2]} = 0$. Wir bezeichnen die noch unbestimmten Bézier-Koeffizienten in $D_2(v)$ wie folgt:

$$a_1 = a_{q-2,1,1}^{[1]}, \quad a_2 = a_{q-1,1,0}^{[1]}, \quad a_{2i-5} = a_{q-1,1,0}^{[i]}, \quad a_{2i-4} = a_{q-2,1,2}^{[i]}, \quad i = 4, \dots, n.$$

Aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen auf $D_2(v)$ erhalten wir das homogene lineare Gleichungssystem

$$M \cdot a = 0, \quad (4.55)$$

wobei $a = (a_1, \dots, a_{2n-4})^t$ gilt und M wie folgt definiert ist:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \varphi_3^0 \\ \varphi_3^1 & \varphi_1^1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_3^2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1^3 & -1 & \ddots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \varphi_2^3 & 0 & -1 & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_3^4 & \varphi_1^4 & -1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \varphi_3^4 & 0 & \varphi_2^4 & 0 & -1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 & \varphi_3^5 & \varphi_1^5 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \varphi_3^{n-2} & 0 & \varphi_2^{n-2} & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Um zu zeigen, dass $\det M \neq 0$ gilt, benötigen wir die folgenden beiden Aussagen. Sei $M_1^n = (m_{i,j})_{\substack{i=4,\dots,2n-4 \\ j=3,\dots,2n-3}}$. Können wir zeigen, dass

$$\det M_1^n = \frac{1}{\prod_{i=0}^2 \varphi_3^i} \left(\frac{\varphi_2^3 \varphi_1^4}{\varphi_3^3 \varphi_3^4} + \frac{\varphi_1^3}{\varphi_3^3} \right) + \sum_{i=6}^n \frac{(-1)^{n-i}}{\prod_{j=0}^2 \varphi_3^j} \varphi_1^{i-1} \phi_2^{[i]}(v_3) \quad (4.56)$$

und

$$\varphi_1^1 = \frac{\varphi_2^3 \varphi_1^4}{\varphi_3^3 \varphi_3^4} - \frac{\varphi_1^3}{\varphi_3^3} - \sum_{i=6}^n \varphi_1^{i-1} \phi_2^{[i]}(v_3) \quad (4.57)$$

gilt, so folgt direkt mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz

$$\begin{aligned} \det M &= -\varphi_1^1 - \left(\prod_{i=0}^2 \varphi_3^i \right) \det M_1^n \\ &\stackrel{(4.56)}{=} -\frac{\varphi_2^3 \varphi_1^4}{\varphi_3^3 \varphi_3^4} + \frac{\varphi_1^3}{\varphi_3^3} - \left(\frac{\varphi_2^3 \varphi_1^4}{\varphi_3^3 \varphi_3^4} + \frac{\varphi_1^3}{\varphi_3^3} \right) - \sum_{i=6}^n (-1 + (-1)^{n-i}) \varphi_1^{i-1} \phi_2^{[i]}(v_3) \\ &\stackrel{(4.57)}{=} -2 \frac{\varphi_2^3 \varphi_1^4}{\varphi_3^3 \varphi_3^4} + 2 \sum_{i=3}^{\frac{n}{2}-1} \varphi_1^{2i} \phi_2^{[2i+1]}(v_3). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt entweder $\varphi_1^{2i} > 0$, $i = 3, \dots, \frac{n}{2} - 1$, oder es gilt $\varphi_1^{2i} < 0$, $i = 3, \dots, \frac{n}{2} - 1$, so dass mit (4.54) $\det M \neq 0$ folgt. (4.55) kann somit nur die triviale Lösung besitzen.

Es bleibt zu zeigen, dass (4.56) und (4.57) gelten.

Beweis von (4.56). Sei n gerade, $n \geq 8$. Wir definieren

$$\begin{aligned} M_1^k &:= (m_{i,j})_{\substack{i=4,\dots,2k-4 \\ j=3,\dots,2k-3}}, & 5 \leq k \leq n \\ M_2^k &:= (m_{i,j})_{\substack{i=4,\dots,2k-7,2k-5 \\ j=3,\dots,2k-7}}, & 6 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Wir zeigen zunächst, dass dann für $5 \leq i \leq n$ gilt:

$$\det M_1^i = \left(\prod_{j=5}^{i-1} \varphi_3^j \right) (\varphi_2^3 \varphi_1^4 + \varphi_1^3 \varphi_3^4) + \sum_{j=6}^i \varphi_1^{j-1} \left(\prod_{k=j}^{i-1} \varphi_3^k \right) \det M_2^j, \quad (4.58)$$

wobei $\prod_{k=i_1}^{i_2} := 1$ sei, falls $i_1 > i_2$ gilt.

Beweis von (4.58) durch vollständige Induktion nach i .

Induktionsanfang $i = 5$.

$$\det M_1^5 = \begin{vmatrix} \varphi_1^3 & -1 & 0 \\ \varphi_2^3 & 0 & -1 \\ 0 & \varphi_3^4 & \varphi_1^4 \end{vmatrix} = \varphi_2^3 \varphi_1^4 + \varphi_1^3 \varphi_3^4. \quad (4.59)$$

Induktionsschritt $i \rightarrow i + 1$. Die Behauptung (4.58) sei für i bereits bewiesen. Mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz folgt

$$\begin{aligned} \det M_1^{i+1} &= \varphi_1^i \det M_2^{i+1} + \varphi_3^i \det M_1^i \\ &\stackrel{\text{I.A.}}{=} \varphi_1^i \det M_2^{i+1} + \varphi_3^i \left(\prod_{j=5}^{i-1} \varphi_3^j \right) (\varphi_2^3 \varphi_1^4 + \varphi_1^3 \varphi_3^4) + \sum_{j=6}^i \varphi_1^{j-1} \varphi_3^i \left(\prod_{k=j}^{i-1} \varphi_3^k \right) \det M_2^j \\ &= \left(\prod_{j=5}^i \varphi_3^j \right) (\varphi_2^3 \varphi_1^4 + \varphi_1^3 \varphi_3^4) + \sum_{j=6}^{i+1} \varphi_1^{j-1} \left(\prod_{k=j}^i \varphi_3^k \right) \det M_2^j. \quad \square \end{aligned}$$

Aus (4.58) folgt wegen $\prod_{i=0}^{n-1} \varphi_3^i = 1$

$$\det M_1^n = \frac{1}{\prod_{i=0}^2 \varphi_3^i} \left(\frac{\varphi_2^3 \varphi_1^4}{\varphi_3^3 \varphi_3^4} + \frac{\varphi_1^3}{\varphi_3^3} \right) + \sum_{i=6}^n \frac{1}{\prod_{j=0}^{i-1} \varphi_3^j} \varphi_1^{i-1} \det M_2^i.$$

Somit bleibt zu zeigen, dass

$$\frac{(-1)^i}{\prod_{j=3}^{i-1} \varphi_3^j} \det M_2^i = \phi_2^{[i]}(v_3), \quad i = 6, \dots, n, \quad (4.60)$$

gilt. Wir definieren

$$\alpha_1^5 := \frac{\varphi_2^3 \varphi_1^4}{\varphi_3^3 \varphi_3^4} - \frac{\varphi_1^3}{\varphi_3^3}, \quad \alpha_2^5 := -\frac{\varphi_2^3}{\varphi_3^3 \varphi_3^4}, \quad \alpha_3^5 := \frac{\varphi_2^3 \varphi_2^4}{\varphi_3^3 \varphi_3^4} + \frac{1}{\varphi_3^3} \quad (4.61)$$

und für $i = 6, \dots, n$ definieren wir induktiv

$$\alpha_1^i := \alpha_1^{i-1} - \frac{\varphi_1^{i-1}}{\varphi_3^{i-1}} \alpha_3^{i-1} \quad \alpha_2^i := \frac{1}{\varphi_3^{i-1}} \alpha_3^{i-1} \quad \alpha_3^i := \alpha_2^{i-1} - \frac{\varphi_2^{i-1}}{\varphi_3^{i-1}} \alpha_3^{i-1}. \quad (4.62)$$

Dann gilt

$$\alpha_\nu^j = \phi_\nu^{[j]}(v_3), \quad \nu = 1, 2, 3, \quad j = 5, \dots, n. \quad (4.63)$$

Beweis von (4.63) durch vollständige Induktion nach j .

Induktionsanfang $j = 5$. Lösen wir Gleichung (4.48) für $i = 6$ nach v_4 auf, ersetzen dadurch für $i = 5$ v_4 in Gleichung (4.48) und lösen anschließend nach v_3 auf, so erhalten wir

$$v_3 = \left(\frac{\varphi_2^3 \varphi_1^4}{\varphi_3^3 \varphi_3^4} - \frac{\varphi_1^3}{\varphi_3^3} \right) v + \left(-\frac{\varphi_2^3}{\varphi_3^3 \varphi_3^4} \right) v_6 + \left(\frac{\varphi_2^3 \varphi_2^4}{\varphi_3^3 \varphi_3^4} + \frac{1}{\varphi_3^3} \right) v_5.$$

Somit folgt $\alpha_\nu^5 = \phi_\nu^{[5]}(v_3)$, $\nu = 1, 2, 3$.

Induktionsschritt $j \rightarrow j + 1$. Die Behauptung (4.63) sei für j bereits bewiesen. Demnach gilt

$$v_3 = \alpha_1^j v + \alpha_2^j v_{j+1} + \alpha_3^j v_j. \quad (4.64)$$

Lösen wir Gleichung (4.48) für $i = j + 2$ nach v_j auf und ersetzen dadurch v_j in Gleichung (4.64), dann erhalten wir

$$v_3 = \left(\alpha_1^j - \frac{\varphi_1^j}{\varphi_3^j} \alpha_3^j \right) v + \left(\frac{1}{\varphi_3^j} \alpha_3^j \right) v_{j+2} + \left(\alpha_2^j - \frac{\varphi_2^j}{\varphi_3^j} \alpha_3^j \right) v_{j+1}. \quad \square$$

Für $i = 5, \dots, n$ definieren wir

$$\beta_1^i := \alpha_1^i - \frac{\varphi_1^0}{\varphi_3^0} \alpha_3^i, \quad \beta_2^i := \frac{1}{\varphi_3^0} \alpha_3^i, \quad \beta_3^i := \alpha_2^i. \quad (4.65)$$

Wegen $\beta_3^i = \alpha_2^i = \phi_2^{[j]}(v_3)$ ist (4.60) äquivalent zu

$$\frac{(-1)^i}{\prod_{j=3}^{i-1} \varphi_3^j} \det M_2^i = \beta_3^i, \quad i = 6, \dots, n. \quad (4.66)$$

Beweis von (4.66) durch vollständige Induktion nach i .

Induktionsanfang $i = 6$. Es gilt

$$\det M_2^6 = \begin{vmatrix} \varphi_1^3 & -1 & 0 \\ \varphi_2^3 & 0 & -1 \\ \varphi_3^4 & 0 & \varphi_2^4 \end{vmatrix} = \varphi_3^4 + \varphi_2^3 \varphi_2^4.$$

Mit (4.61), (4.62) und (4.65) erhalten wir dann

$$\beta_3^6 = \alpha_2^6 = \frac{1}{\varphi_3^5} \alpha_3^5 = \frac{\varphi_3^4 + \varphi_2^3 \varphi_2^4}{\varphi_3^3 \varphi_3^4 \varphi_3^5} = \frac{\det M_2^6}{\varphi_3^3 \varphi_3^4 \varphi_3^5}.$$

Für $i = 7$ gilt:

$$\det M_2^7 = \begin{vmatrix} \varphi_1^3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_2^3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_3^4 & \varphi_1^4 & -1 & 0 \\ \varphi_3^4 & 0 & \varphi_2^4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \varphi_3^5 & 0 & \varphi_2^5 \end{vmatrix} = \varphi_2^5 (\varphi_3^4 + \varphi_2^3 \varphi_2^4) + \varphi_3^5 \varphi_2^3.$$

Dann erhalten wir mit (4.61), (4.62) und (4.65)

$$\beta_3^7 = \alpha_2^7 = \frac{\alpha_2^5 - \varphi_2^5 \alpha_2^6}{\varphi_3^6} = - \frac{\varphi_2^5 (\varphi_3^4 + \varphi_2^3 \varphi_2^4) + \varphi_3^5 \varphi_2^3}{\varphi_3^3 \varphi_3^4 \varphi_3^5 \varphi_3^6} = - \frac{\det M_2^7}{\prod_{j=3}^6 \varphi_3^j}.$$

Induktionsschritt $i \rightarrow i+1$. Es sei bereits bewiesen, dass für i und $i-1$ die Behauptung (4.66) gilt. Aus dem Laplaceschen Entwicklungssatz folgt

$$\det M_2^{i+1} = \varphi_3^{i-1} \det M_2^{i-1} + \varphi_2^{i-1} \det M_2^i. \quad (4.67)$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \beta_3^{i+1} &\stackrel{(4.65)}{=} \alpha_2^{i+1} \stackrel{(4.62)}{=} \frac{1}{\varphi_3^i} \alpha_2^{i-1} + \frac{\varphi_2^{i-1}}{\varphi_3^i} \alpha_2^i \stackrel{(4.65)}{=} \frac{1}{\varphi_3^i} \beta_3^{i-1} + \frac{\varphi_2^{i-1}}{\varphi_3^i} \beta_3^i \\ &\stackrel{\text{I.A.}}{=} (-1)^{i+1} \frac{\varphi_3^{i-1} \det M_2^{i-1} + \varphi_2^{i-1} \det M_2^i}{\prod_{j=3}^i \varphi_3^j} \stackrel{(4.67)}{=} (-1)^{i+1} \frac{\det M_2^{i+1}}{\prod_{j=3}^i \varphi_3^j}. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung (4.56) bewiesen. \square

Beweis von (4.57). Seien α_ν^i und β_ν^i wie in (4.61), (4.62) und (4.65) definiert. Wir zeigen zunächst, dass

$$\beta_1^n = \varphi_1^1 \quad \text{und} \quad \beta_2^n = 0 \quad (4.68)$$

gilt. Mit (4.63) gilt $v_3 = \alpha_1^n v + \alpha_2^n v_1 + \alpha_3^n v_0$. Lösen wir Gleichung (4.48) für $i=2$ nach v_0 auf und ersetzen dadurch v_0 , dann erhalten wir, da $\varphi_2^0 = 0$ gilt,

$$v_3 = \left(\alpha_1^n - \frac{\varphi_1^0}{\varphi_3^0} \alpha_3^n \right) v + \frac{\alpha_3^n}{\varphi_3^0} v_2 + \alpha_2^n v_1 \stackrel{(4.65)}{=} \beta_1^n v + \beta_2^n v_2 + \beta_3^n v_1.$$

D. h. es folgt $\beta_1^n = \varphi_1^1$ und $\beta_2^n = \varphi_2^1 = 0$. Somit bleibt wegen (4.63) und (4.65) zu zeigen, dass

$$\beta_1^n = \frac{\varphi_2^3 \varphi_1^4}{\varphi_3^3 \varphi_3^4} - \frac{\varphi_1^3}{\varphi_3^3} - \sum_{i=6}^n \varphi_1^{i-1} \beta_3^i \quad (4.69)$$

gilt. Wir zeigen allgemeiner, dass

$$\beta_1^i = \frac{\varphi_2^3 \varphi_1^4}{\varphi_3^3 \varphi_3^4} - \frac{\varphi_1^3}{\varphi_3^3} - \varphi_1^0 \beta_2^i - \sum_{j=6}^i \varphi_1^{j-1} \beta_3^j, \quad i = 5, \dots, n, \quad (4.70)$$

gilt.

Beweis von (4.70) durch vollständige Induktion nach i .

Induktionsanfang $i=5$.

$$\beta_1^5 \stackrel{(4.65)}{=} \alpha_1^5 - \frac{\varphi_1^0}{\varphi_3^0} \alpha_3^5 \stackrel{(4.61)}{=} \frac{\varphi_2^3 \varphi_1^4}{\varphi_3^3 \varphi_3^4} - \frac{\varphi_1^3}{\varphi_3^3} - \varphi_1^0 \beta_2^5.$$

Induktionsschritt $i \rightarrow i + 1$. Es sei bereits bewiesen, dass für i die Behauptung (4.70) gilt. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \beta_1^{i+1} \stackrel{(4.65)}{=} \alpha_1^{i+1} - \frac{\varphi_1^0}{\varphi_3^0} \alpha_3^{i+1} \stackrel{(4.62)}{=} \alpha_1^i - \varphi_1^i \alpha_2^{i+1} - \frac{\varphi_1^0}{\varphi_3^0} \alpha_3^{i+1} \\
&= \alpha_1^i - \frac{\varphi_1^0}{\varphi_3^0} \alpha_3^i + \frac{\varphi_1^0}{\varphi_3^0} \alpha_3^i - \frac{\varphi_1^0}{\varphi_3^0} \alpha_3^{i+1} - \varphi_1^i \alpha_2^{i+1} \\
&\stackrel{(4.65)}{=} \beta_1^i + \varphi_1^0 \beta_2^i - \varphi_1^0 \beta_2^{i+1} - \varphi_1^i \beta_3^{i+1} \\
&\stackrel{\text{I.A.}}{=} \frac{\varphi_2^3 \varphi_1^4}{\varphi_3^3 \varphi_3^4} - \frac{\varphi_1^3}{\varphi_3^3} - \varphi_1^0 \beta_2^i - \sum_{j=6}^i \varphi_1^{j-1} \beta_3^j + \varphi_1^0 \beta_2^i - \varphi_1^0 \beta_2^{i+1} - \varphi_1^i \beta_3^{i+1} \\
&= \frac{\varphi_2^3 \varphi_1^4}{\varphi_3^3 \varphi_3^4} - \frac{\varphi_1^3}{\varphi_3^3} - \varphi_1^0 \beta_2^{i+1} - \sum_{j=6}^{i+1} \varphi_1^{j-1} \beta_3^j. \quad \square
\end{aligned}$$

Für $i = n$ folgt dann mit (4.68) aus (4.70) die Behauptung. \blacksquare

Wir sind nun in der Lage, eine dritte Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_q^1(\Delta_v)$ nach der oben beschriebenen Vorgehensweise zu konstruieren. Für $l = 0, \dots, n-1$ sei $R_1(e_l)$ wie in (4.7) und $\mathcal{M}_{3,q}^1(e_l)$ wie in Abschnitt 4.1.1 gegeben.

Konstruktion minimal bestimmender Mengen:

Sei v ein beliebiger innerer, nicht singulärer Eckpunkt von Δ . Dann sei \mathcal{A}_0 eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(\Delta_v)$ auf $D_2(v)$, die wie in einem der obigen Lemmas definiert ist. Für $l = 1, \dots, n$ sei $\mathcal{A}_l^* \in \mathcal{M}_{3,q}^1(e_{l-1})$ gegeben, wobei $P_{q-2,2,0}^{[l-1]} \in \mathcal{A}_l^*$ gelte, falls e_{l-1} bzgl. v nicht degeneriert ist. Für $l = 1, \dots, n$ setzen wir

$$\mathcal{A}_l := \begin{cases} \mathcal{A}_l^* \setminus \{P_{q-2,2,0}^{[l-1]}\}, & \text{falls } e_{l-1} \text{ bzgl. } v \text{ nicht degeneriert ist,} \\ \mathcal{A}_l^*, & \text{falls } e_{l-1} \text{ bzgl. } v \text{ degeneriert ist.} \end{cases}$$

Ferner sei \mathcal{M} wie in (4.39) gegeben. Dann definieren wir

$$\mathcal{A} := \bigcup_{l=0}^n \mathcal{A}_l \cup \mathcal{M}.$$

Theorem 4.16. *Sei $q \geq 3$ und sei v ein nicht singulärer Eckpunkt. Dann ist \mathcal{A} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(\Delta_v)$.*

Beweis. Sei $q \geq 3$ und es gelte $s \in S_q^1(\Delta_v)$. Ferner gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}$. Dann ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_q(\Delta)$ gilt. Nach Voraussetzung folgt direkt $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in D_2(v)$. Nach Definition von \mathcal{A}_l , $l = 1, \dots, n$, folgt dann mit Theorem 4.4 $\lambda_P s = 0$, $P \in \bigcup_{l=0}^{n-1} R_1(e_l)$. Wegen $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ erhalten wir somit $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_q(\Delta_v)$. Ferner ist \mathcal{A} minimal, denn es gilt $|\mathcal{A}| = \frac{nq(q-1)}{2} + 3 = \dim S_q^1(\Delta_v)$. \blacksquare

4.4 Standardzellen von Randpunkten

Sei v ein beliebiger Randpunkt der Triangulierung Δ . Da Δ_v einem Kegel K mit Scheitelpunkt v und $(\deg(v) - 2)$ inneren Kanten entspricht, ergibt sich aus den Ergebnissen aus Abschnitt 4.2 direkt eine allgemeine Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_q^1(\Delta_v)$, $q \geq 3$.

Sei $n := \deg(v)$. Wir nummerieren die Eckpunkte von Δ_v gegen den Uhrzeigersinn mit v_0, \dots, v_{n-1} . Für $l = 0, \dots, n-1$ sei $e_l := [v, v_l]$ und für $l = 1, \dots, n-1$ sei $T^{[l]}$ definiert durch $T^{[l]} := \Delta(v, v_{l-1}, v_l)$.

Konstruktion minimal bestimmender Mengen:

Die Menge $\mathcal{A}_0 \subset D_1(v)$ bestehe aus drei nicht kollinearen BB-Punkten.

Für $K = \Delta_v$ sei \mathcal{A}_K von der in (4.36) gegebenen Form. Ferner sei

$$\tilde{R}_1(K) := \{P_{q-k,0,k}^{[1]}, P_{q-k,1,k-1}^{[1]} : k = 2, \dots, q\} \cup \{P_{q-j,j,0}^{[n-1]}, P_{q-j,j-1,1}^{[n-1]} : j = 2, \dots, q\}.$$

Theorem 4.17. *Sei $q \geq 3$. Dann ist $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_K \cup \tilde{R}_1(K)$ eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(\Delta_v)$.*

Beweis. Sei $q \geq 3$ und es gelte $s \in S_q^1(\Delta_v)$. Ferner gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}$. Dann ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_q(\Delta_v)$ gilt. Wegen $\mathcal{A}_0 \cup \tilde{R}_1(K) \subset \mathcal{A}$ folgt direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in D_1(v) \cup \tilde{R}_1(K)$. Aus Theorem 4.6 und 4.7 folgt dann wegen $\mathcal{A}_K \subset \mathcal{A}$ bereits, dass \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_q^1(\Delta_v)$ ist. Ferner ist \mathcal{A} minimal, denn es gilt mit Theorem 2.6

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| &= 3 + 4(q-1) + (n-2)(2q-3) - 1 + (n-1) \frac{(q-3)(q-2)}{2} \\ &= (n-2) \frac{q(q-1)}{2} + \frac{(q+1)(q+2)}{2} = \dim S_q^1(\Delta_v). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Kapitel 5

Der Splineraum $S_3^1(\Delta)$

In diesem Kapitel konstruieren wir große Klassen minimal bestimmender Mengen von $S_3^1(\Delta)$ auf allgemeinen Triangulierungen. Betrachten wir die untere Schranke in (2.9) für die Dimension von $S_3^1(\Delta)$, dann gilt:

$$\dim S_3^1(\Delta) \geq 10 + 3|E_I| - 7|V_I| + S = 3|V_B| + 2|V_I| + S + 1. \quad (5.1)$$

Der Raum $S_3^1(\Delta)$ ist für die Splinetheorie von besonderem Interesse, da der Grad $q = 3$ nahe der Differenzierbarkeitsordnung $r = 1$ liegt und da mit (5.1) folgt, dass die Dimension von $S_3^1(\Delta)$ größer als die Anzahl der Eckpunkte von Δ ist. Betrachten wir im Gegensatz dazu $S_2^1(\Delta)$, so ist die untere Schranke in (2.9) gleich $|V_B| + S + 3$. Die Literatur zeigt jedoch, dass es sich bei $S_3^1(\Delta)$ um einen sehr komplexen Raum handelt, für den bis heute die Dimension für beliebige Triangulierungen nicht bekannt ist. Billera [5] zeigte mit Hilfe homologischer Methoden, dass jede Triangulierung durch kleine Veränderungen der Eckpunkte so modifiziert werden kann, dass in (5.1) Gleichheit gilt.

Nürnberg & Zeilfelder [49] untersuchten $S_3^1(\Delta)$ auf der Klasse der geordneten Kegeltriangulierungen, wobei sie Semisingularitäten ausschlossen. Sie zeigten, dass für diese Klasse von Triangulierungen die Dimension von $S_3^1(\Delta)$ gleich der unteren Schranke in (5.1) ist. Für die Klasse der so genannten *Nested-Polygons-Triangulierungen* bewiesen Davydov, Nürnberg & Zeilfelder [20], dass in (5.1) Gleichheit gilt.

Wir betrachten im Folgenden $S_3^1(\Delta)$ auf der Klasse der geordneten Kegeltriangulierungen. In Abschnitt 5.1 konstruieren wir basierend auf den Ergebnissen aus Abschnitt 4.2 für $q = 3$ induktiv eine allgemeine Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_3^1(\Delta)$ für die Klasse der geordneten Kegeltriangulierungen. Wir zeigen ferner, dass für diese Triangulierungen die Dimension von $S_3^1(\Delta)$ gleich der unteren Schranke in (5.1) ist. Unter Verwendung der Relationen zwischen den Bézier-Koeffizienten eines Splines und dessen partiellen Ableitungen erhalten wir aus diesen Resultaten, wie in Abschnitt 5.2 beschrie-

ben, direkt Hermite-Interpolationsmengen für $S_3^1(\Delta)$. In Abschnitt 5.3 konstruieren wir ferner eine allgemeine Klasse von Lagrange-Interpolationsmengen für $S_3^1(\Delta)$.

Während die geordneten Kegeltriangulierungen ohne Semisingularitäten eine Untermenge der Nested-Polygons-Triangulierungen bilden, ist dies bei den geordneten Kegeltriangulierungen mit Semisingularitäten nicht der Fall, wie das folgende Beispiel zeigt. Wir betrachten die Triangulierung der vorgegebenen geschachtelten Polygone P_1, P_2, P_3 in Abbildung 5.1. Es gilt, dass diese Triangulierung keine Nested-Polygons-Triangulierungen im Sinne von Davydov, Nürnberger und Zeilfelder ist. Denn die Nested-Polygons-Triangulierungen in der in [20] beschriebenen Klasse müssen die folgenden Bedingungen erfüllen: Die Eckpunkte eines jeden Polygonzugs P_j müssen im Uhrzeigersinn so nummeriert werden können, dass beim schrittweisen Anhängen der Eckpunkte v_ν zur bereits konstruierten Teiltriangulierung $\Delta_{\nu-1}$ keiner der Eckpunkte v_ν gleichzeitig semisingulär vom Typ II bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ und nicht singulär ist. Ferner sollen die Eckpunkte von P_j so durchlaufen werden, dass zuerst ein Eckpunkt angehängt wird, der mit mindestens zwei Eckpunkten von P_{j-1} eine gemeinsame Kante hat, und zuletzt ein Eckpunkt, der mit mindestens zwei Eckpunkten von P_{j+1} eine gemeinsame Kante hat. Betrachten wir die Eckpunkte von P_2 in Abbildung 5.1, dann sind die Eckpunkte w_1, \dots, w_4 bzgl. der Triangulierung von Ω_2 semisingulär vom Typ II, wobei Ω_2 das Polygon mit Rand P_2 bezeichne. Ferner besitzt w_5 nur mit einem Eckpunkt von P_3 eine gemeinsame Kante. Somit können die Eckpunkte w_1, \dots, w_6 nur in der gegebenen Reihenfolge zur jeweiligen Teiltriangulierung hinzugefügt

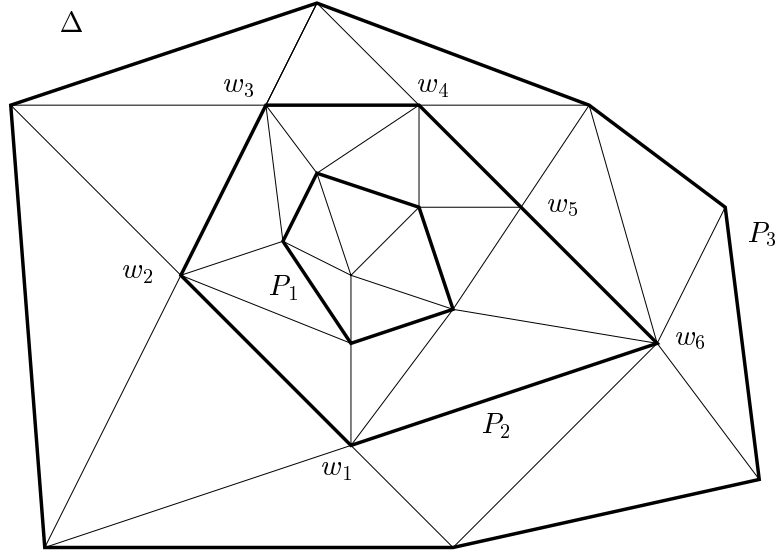


Abb. 5.1: Triangulierung Δ der vorgegebenen Nested Polygons P_1, P_2, P_3 , die nicht in der Klasse von [20] liegt.

werden. Dann gilt aber beim Anhängen von w_5 , dass w_5 bzgl. der entstandenen Teiltriangulierung semisingulär vom Typ II ist. Es folgt, dass die Triangulierung nicht in der Klasse von [20] liegt. Andererseits gehört Δ zu der Klasse der geordneten Kegeltriangulierungen mit Semisingularitäten, wie die Zerlegung von Δ in Kegel in Abbildung 5.2 zeigt.

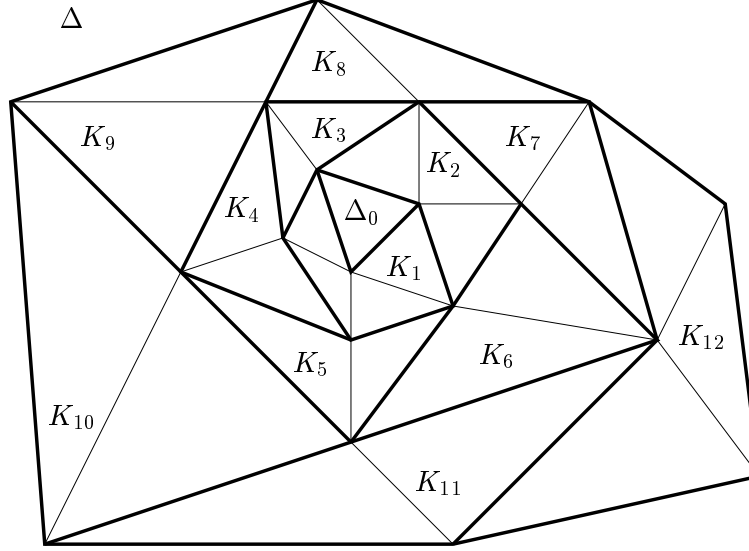


Abb. 5.2: Zerlegung von Δ nach Algorithmus 3 für geordnete Kegeltriangulierungen.

Im Folgenden sei Δ stets eine geordnete Kegeltriangulierung. Dann liefert uns Algorithmus 3 aus Abschnitt 3.2 eine Indizierung v_ν , $\nu = 0, \dots, n$, der Eckpunkte aus V_I sowie eine zugehörige Kette von Teiltriangulierungen $\Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \dots \subset \Delta_n = \Delta$. Nach Konstruktion gilt $\Delta_0 = T^{[1, n_1]} = \Delta(v_1, v_{1, n_1-1}, v_{1, n_1})$. Für $\nu = 1, \dots, n$ ist Δ_ν definiert durch $\Delta_\nu := \Delta_{\nu-1} \cup K_\nu$, wobei K_ν bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ wie in (3.1) definiert ist. Es bezeichne λ_ν die Anzahl der inneren Kanten von K_ν . Wir nummerieren die Randpunkte von K_ν gegen den Uhrzeigersinn mit $v_{\nu, l}$, $l = 0, \dots, \lambda_\nu + 1$. Dann sei $e_{\nu, l} = [v_\nu, v_{\nu, l}]$, $l = 0, \dots, \lambda_\nu + 1$. Ferner gelte $T^{[\nu, l]} = \Delta(v_\nu, v_{\nu, l}, v_{\nu, l-1})$ für $l = 1, \dots, \lambda_\nu + 1$. Es bezeichne $n_\nu = \deg(v_\nu)$ den Grad von v_ν in Δ , $l = 1, \dots, n$.

O.B.d.A. setzen wir im Folgenden voraus, dass $\lambda_1, \lambda_2 \geq 3$ gilt. Nach Konstruktion gilt somit $\deg(v) \geq 5$, $v \in V_I$. Insbesondere enthält Δ dann keine singulären Eckpunkte.

5.1 Minimal bestimmende Mengen

Sei Δ eine geordnete Kegeltriangulierung. Im Folgenden definieren wir induktiv eine allgemeine Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_3^1(\Delta)$. Dabei gehen wir wie folgt vor.

Für $\nu \leq n$ sei $\mathcal{A}_{\nu-1}$ eine minimal bestimmende Menge von $S_3^1(\Delta)$ auf $\mathcal{B}_3(\Delta_{\nu-1})$ so gegeben, dass $S_3^1(\Delta)$ für keinen Randpunkt v von $\Delta_{\nu-1}$ auf $D_2(v)$ überbestimmt ist. Nach Konstruktion gilt $\Delta_\nu = \Delta_{\nu-1} \cup K_\nu$. Dann wählen wir für K_ν die Menge \mathcal{A}_{K_ν} wie folgt. Ist keiner der Randpunkte von K_ν bzgl. Δ_ν semisingulär, dann sei \mathcal{A}_{K_ν} von der in (4.36) gegebenen Form. Sind hingegen ein oder mehrere Randpunkte $v_{\nu,l}$ von K_ν bzgl. Δ_ν semisingulär, dann berücksichtigen wir dies bei der Wahl der BB-Punkte für \mathcal{A}_{K_ν} , da ansonsten $S_3^1(\Delta)$ auf einem BB-Punkt aus $D_2(v_{\nu,l})$ überbestimmt ist. In beiden Fällen definieren wir $\mathcal{A}_\nu = \mathcal{A}_{\nu-1} \cup \mathcal{A}_{K_\nu}$.

Betrachten wir für $\nu \in \{1, \dots, n\}$ den Kegel K_ν , dann gilt nach Konstruktion von Δ , dass mindestens drei Dreiecke der Zelle $\Delta_{v_{\nu,l}}$ nicht in Δ_ν liegen, $l = 0, \dots, \lambda_\nu - 1$. Demnach müssen wir für $l = 0, \dots, \lambda_\nu - 1$ nur den Fall behandeln, dass $v_{\nu,l}$ semisingulär vom Typ II bzgl. Δ_ν ist. Für v_{ν,λ_ν} gilt, dass mindestens vier Dreiecke mit Eckpunkt v_{ν,λ_ν} nicht in Δ_ν liegen, so dass v_{ν,λ_ν} bzgl. Δ_ν nicht semisingulär ist. $v_{\nu,\lambda_\nu+1}$ hingegen kann nach Konstruktion sowohl semisingulär vom Typ I bzgl. Δ_ν als auch semisingulär vom Typ II bzgl. Δ_ν sein (vgl. Abb. 5.3). Ist $v_{\nu,\lambda_\nu+1}$ semisingulär vom Typ I und ist ferner $\tilde{e}_{\nu,\lambda_\nu+1}$ bzgl. $v_{\nu,\lambda_\nu+1}$ degeneriert, dann gilt, dass $v_{\nu,\lambda_\nu+1}$ bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ semisingulär vom Typ II ist. D. h. dieser Fall wurde in einem früheren Schritt beim Hinzufügen von $v_{\nu,\lambda_\nu+1}$ zu einer Teiltriangulierung Δ_μ mit $\mu < \nu$, berücksichtigt. Somit müssen beim Anhängen von K_ν für $l = \lambda_\nu + 1$ nur die beiden Fälle behandelt werden, dass entweder $v_{\nu,\lambda_\nu+1}$ semisingulär vom Typ I bzgl. Δ_ν ist und ferner $\tilde{e}_{\nu,\lambda_\nu+1}$ bzgl. $v_{\nu,\lambda_\nu+1}$ nicht degeneriert ist oder $v_{\nu,\lambda_\nu+1}$ bzgl. Δ_ν semisingulär vom Typ II ist. (In letzterem Fall ist $\tilde{e}_{\nu,\lambda_\nu+1}$ ebenfalls bzgl. $v_{\nu,\lambda_\nu+1}$ nicht degeneriert.)

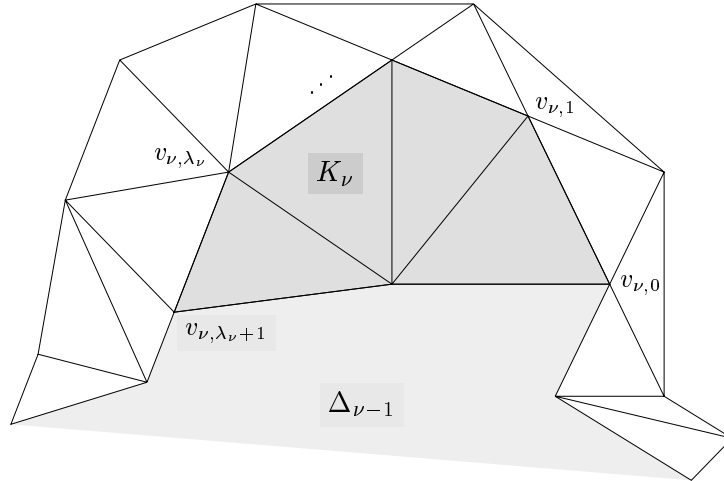


Abb. 5.3: Bei Hinzufügen von K_ν zu $\Delta_{\nu-1}$ sind die Eckpunkte $v_{\nu,l}$, $l = 0, \dots, \lambda_\nu + 1$, $l \neq \lambda_\nu$, bzgl. $\Delta_\nu = \Delta_{\nu-1} \cup K_\nu$ semisingulär. Die Eckpunkte werden in der Reihenfolge $v_{\nu,\lambda_\nu+1}, v_{\nu,0}, \dots, v_{\nu,\lambda_\nu}$ durchlaufen.

Konstruktion minimal bestimmender Mengen:

Wir definieren die Mengen \mathcal{A}_ν , $\nu = 0, \dots, n$, induktiv durch

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0 &:= \mathcal{B}_3(T^{[0]}), \\ \mathcal{A}_\nu &:= \mathcal{A}_{\nu-1} \cup (\mathcal{A}_{K_\nu} \setminus \mathcal{P}_\nu), \quad \nu = 1, \dots, n,\end{aligned}\tag{5.2}$$

wobei für $\nu = 1, \dots, n$ die Menge \mathcal{A}_{K_ν} wie in (4.36) gegeben ist, falls v_ν nicht semisingulär bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ ist, und anderenfalls \mathcal{A}_{K_ν} wie in (4.37) gegeben ist. Ferner gelte $\mathcal{P}_\nu \subset \mathcal{A}_{K_\nu}$, wobei \mathcal{P}_ν wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\nu &:= \{P_{0,2,1}^{[\nu,l+1]} : v_{\nu,l} \text{ ist bzgl. } \Delta_\nu \text{ semisingulär vom Typ II, } 0 \leq l < \lambda_\nu\} \\ &\cup \{P_{0,1,2}^{[\nu,\lambda_\nu+1]} : v_{\nu,\lambda_\nu+1} \text{ ist bzgl. } \Delta_\nu \text{ semisingulär und } \tilde{e}_{\nu,\lambda_\nu+1} \text{ ist bzgl.} \\ &\quad v_{\nu,\lambda_\nu+1} \text{ nicht degeneriert}\}.\end{aligned}$$

Ferner gelte

$$|(\mathcal{A}_{K_\nu} \setminus \mathcal{P}_\nu) \cap D_2(v_\nu)| = \begin{cases} \lambda_\nu - 1, & \text{falls } v_\nu \text{ bzgl. } \Delta_{\nu-1} \text{ nicht semisingulär ist,} \\ \lambda_\nu, & \text{sonst.} \end{cases}\tag{5.3}$$

Theorem 5.1. *Sei Δ eine geordnete Kegeltriangulierung. Dann ist \mathcal{A}_n wie in (5.2) eine minimal bestimmende Menge von $S_3^1(\Delta)$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n$ eine bestimmende Menge von $S_3^1(\Delta)$ ist. Sei $s \in S_3^1(\Delta)$ und es gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}$. Dann ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_3(\Delta)$ gilt. Für $\nu = 1, \dots, n$ und $l = 1, \dots, n_\nu$ sei $s|_{T^{[\nu,l]}}$ in der BB-Darstellung (2.5) gegeben. Für $\nu = 1, \dots, n$ und $v \in V_B^{(\nu)}$ bezeichne $K_v^{(\nu)}$ den Kegel von v bzgl. Δ_ν . Dann sei $R_1(K_v^{(\nu)})$ wie in (4.2) gegeben, falls v bzgl. Δ_ν nicht semisingulär vom Typ II ist. Anderenfalls sei $R_1(K_v^{(\nu)})$ wie in (4.3) gegeben. Wir definieren

$$R_1(\Delta_\nu) := \cup_{v \in V_B^{(\nu)}} R_1(K_v^{(\nu)}).$$

Im Folgenden beweisen wir durch vollständige Induktion nach ν , dass \mathcal{A}_ν eine bestimmende Menge von $S_3^1(\Delta)$ auf $\mathcal{B}_3(\Delta_\nu) \cup R_1(\Delta_\nu)$ ist, $\nu = 0, \dots, n$.

Induktionsanfang $\nu = 0$. Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}_3(T^{[1,n_1]})$. Aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen an den Kanten sowie an den Eckpunkten von Δ_0 folgt direkt $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_3(\Delta_0) \cup R_1(\Delta_0)$. Da für alle $v \in V_I$ $\deg(v) \geq 5$ gilt, ist kein Eckpunkt von Δ_0 semisingulär bzgl. Δ_0 .

Induktionsschritt $\nu - 1 \rightarrow \nu$. Die Behauptung sei für $\nu - 1$ bereits bewiesen. Dann gilt $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_3(\Delta_{\nu-1}) \cup R_1(\Delta_{\nu-1})$. Gilt $\mathcal{P}_\nu = \emptyset$, dann folgt mit Theorem 4.6 bereits

die Behauptung. Sei nun $\mathcal{P}_\nu \neq \emptyset$. Da \mathcal{A}_{K_ν} wie in (4.36) definiert ist und $\mathcal{A}_{K_\nu} \setminus \mathcal{P}_\nu$ die Bedingung (5.3) erfüllt, folgt

$$\lambda_P s = 0, \quad P \in D_2(v_\nu). \quad (5.4)$$

Sei $v_{\nu, \lambda_\nu+1}$ zunächst semisingulär bzgl. Δ_ν . Ferner sei die Kante $\tilde{e}_{\nu, \lambda_\nu+1}$ bzgl. $v_{\nu, \lambda_\nu+1}$ nicht degeneriert. Wir zeigen, dass in diesem Fall $a_{0,1,2}^{[\nu, \lambda_\nu+1]} = 0$ folgt. O.B.d.A. sei $v_{\nu, \lambda_\nu+1}$ bzgl. Δ_ν semisingulär vom Typ II. (Der Fall, dass $v_{\nu, \lambda_\nu+1}$ bzgl. Δ_ν semisingulär vom Typ I ist, lässt sich analog zeigen.) Wir nummerieren die Dreiecke mit Eckpunkt $v_{\nu, \lambda_\nu+1}$, die nicht in Δ_ν enthalten sind im Uhrzeigersinn mit $\tilde{T}^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$. Ferner sei \tilde{e}_j die gemeinsame Kante von $\tilde{T}^{(j)}$ und $\tilde{T}^{(j+1)}$, $j = 1, 2$. Da $\tilde{T}^{(1)}$ eine gemeinsame Kante mit $\Delta_{\nu-1}$ hat, folgt aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen an dieser Kante für den Koeffizienten $\tilde{a}_{111}^{(1)}$ von $\tilde{p}_1 \in \tilde{\Pi}_3$ auf $\tilde{T}^{(1)}$, dass $\tilde{a}_{1,1,1}^{(1)} = 0$ ist. Ferner gilt, da \tilde{e}_1 und \tilde{e}_2 degeneriert sind, für die Koeffizienten $\tilde{a}_{1,1,1}^{(j)}$ von $\tilde{p}_j \in \tilde{\Pi}_3$ auf $\tilde{T}^{(j)}$, dass $\tilde{a}_{1,1,1}^{(j)} = 0$, $j = 2, 3$, gilt. Da $\tilde{e}_{\nu, \lambda_\nu+1}$ bzgl. $v_{\nu, \lambda_\nu+1}$ nicht degeneriert ist, folgt dann aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen des Weiteren $a_{0,1,2}^{[\nu, \lambda_\nu+1]} = 0$. Nach Konstruktion von \mathcal{A}_{K_ν} und \mathcal{P}_ν erhalten wir mit (5.4)

$$|(\mathcal{A}_{K_\nu} \setminus \mathcal{P}_\nu) \cap \{P_{0,3,0}^{[\nu, \lambda_\nu]}, P_{0,2,1}^{[\nu, \lambda_\nu]}\}| = \begin{cases} 0, & \text{falls } v_{\nu, \lambda_\nu-1} \text{ bzgl. } \Delta_\nu \text{ semisingulär ist,} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.5)$$

Ist $v_{\nu, \lambda_\nu+1}$ bzgl. Δ_ν nicht semisingulär oder ist $\tilde{e}_{\nu, \lambda_\nu+1}$ bzgl. $v_{\nu, \lambda_\nu+1}$ degeneriert, dann gilt nach Konstruktion von \mathcal{A}_{K_ν} und \mathcal{P}_ν mit (5.4)

$$\begin{aligned} |(\mathcal{A}_{K_\nu} \setminus \mathcal{P}_\nu) \cap \{P_{0,3,0}^{[\nu, \lambda_\nu]}, P_{0,1,2}^{[\nu, \lambda_\nu+1]}\}| &= 1, \text{ falls } v_{\nu, \lambda_\nu-1} \text{ bzgl. } \Delta_\nu \text{ semisingulär ist,} \\ |(\mathcal{A}_{K_\nu} \setminus \mathcal{P}_\nu) \cap \{P_{0,3,0}^{[\nu, \lambda_\nu]}, P_{0,2,1}^{[\nu, \lambda_\nu]}, P_{0,1,2}^{[\nu, \lambda_\nu+1]}\}| &= 2, \text{ sonst.} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Wir zeigen nun für $l = 1, \dots, \lambda_\nu - 1$, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in D_1(v_{\nu, l})$ gilt. Ist $\lambda_\nu \geq 2$ und ist keiner der Eckpunkte $v_{\nu, l}$, $l = 0, \dots, \lambda_\nu - 2$, bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ semisingulär, dann folgt nach Konstruktion, dass $\mathcal{A}_{K_\nu} \setminus \mathcal{P}_\nu$ für $l = 1, \dots, \lambda_\nu - 1$ genau zwei BB-Punkte aus $\{P_{0,3,0}^{[\nu, l]}, P_{0,2,1}^{[\nu, l]}, P_{0,1,2}^{[\nu, l+1]}\}$ enthält. Mit (5.4) folgt dann aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen auf $D_1(v_{\nu, l})$ direkt, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in D_1(v_{\nu, l})$, $l = 1, \dots, \lambda_\nu - 1$, gilt.

Sei nun l^* der kleinste Index mit $0 \leq l^* \leq \lambda_\nu - 1$, so dass v_{ν, l^*} bzgl. Δ_ν semisingulär ist. Ist $l^* = 0$, dann folgt analog zu dem Fall, dass $v_{\nu, \lambda_\nu+1}$ semisingulär bzgl. Δ_ν ist und $\tilde{e}_{\nu, \lambda_\nu+1}$ bzgl. $v_{\nu, \lambda_\nu+1}$ nicht degeneriert ist, $a_{0,2,1}^{[\nu, 1]} = 0$. Nach Konstruktion enthält $\mathcal{A}_{K_\nu} \setminus \mathcal{P}_\nu$ ferner einen BB-Punkt aus $\{P_{0,3,0}^{[\nu, 1]}, P_{0,1,2}^{[\nu, 2]}\}$, so dass mit (5.4) $\lambda_P s = 0$, $P \in D_1(v_{\nu, 1})$, folgt.

Ist $l^* > 0$, dann folgt nach Definition von $\mathcal{A}_{K_\nu} \setminus \mathcal{P}_\nu$, dass $\lambda_P s = 0$, $P \in D_1(v_{\nu, l})$, $l = 1, \dots, l^*$, gilt. Insbesondere gilt somit $\lambda_P s = 0$, $P \in T^{[\nu, l^*]}$, so dass wir analog zum Fall $l^* = 0$ $\lambda_P s = 0$, $P \in D_1(v_{\nu, l^*})$ erhalten. Sukzessives Wiederholen dieses Arguments im Fall weiterer semisingulärer Eckpunkte $v_{\nu, l}$, $l \in \{l^* + 1, \dots, \lambda_\nu - 1\}$, ergibt $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in D_1(v_{\nu, l})$, $l = 1, \dots, \lambda_\nu - 1$.

Betrachten wir $D_1(v_{\nu, \lambda_\nu})$, folgt mit (5.4) $a_{1,2,0}^{[\nu, \lambda_\nu]} = 0$. Ist $v_{\nu, \lambda_\nu+1}$ semisingulär bzgl. Δ_ν und ist $\tilde{e}_{\nu, \lambda_\nu+1}$ bzgl. $v_{\nu, \lambda_\nu+1}$ nicht degeneriert, dann gilt $a_{0,1,2}^{[\nu, \lambda_\nu+1]} = 0$. Ist $v_{\nu, \lambda_\nu-1}$ semisingulär bzgl. Δ_ν , erhalten wir $a_{0,2,1}^{[\nu, \lambda_\nu]} = 0$. Mit (5.5) oder (5.6) folgt dann aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen auf $D_1(v_{\nu, \lambda_\nu})$ ebenfalls $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in D_1(v_{\nu, \lambda_\nu})$. Somit gilt $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_3(K_\nu)$. Mit den C^1 -Stetigkeitsbedingungen an den Kanten $\tilde{e}_{\nu, l}$, $l = 1, \dots, \lambda + 1$, und an den Eckpunkten $v_{\nu, l}$, $l = 0, \dots, \lambda + 1$, folgt dann $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_3(\Delta_\nu) \cup R_1(\Delta_\nu)$.

Somit bleibt zu zeigen, dass \mathcal{A} minimal ist.

Sei V_I^{ns} die Menge der Eckpunkte aus $\{v_\nu : \nu = 1, \dots, n\}$, die bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ nicht semisingulär sind. Ferner bezeichne V_I^s die Menge der Eckpunkte aus $\{v_\nu : \nu = 1, \dots, n\}$, die bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ semisingulär sind. Dann gilt offensichtlich $n = |V_I| = |V_I^{ns}| + |V_I^s|$.

Für $\nu = 0, \dots, n$ bezeichnen wir mit $E_I^{(\nu)}$ die Menge der inneren Kanten von Δ_ν . Dann gilt nach Konstruktion $|E_I^{(0)}| = 0$ und $|E_I^{(\nu)}| = |E_I^{(\nu-1)}| + \lambda_\nu + 2$ für $\nu = 1, \dots, n$. Wegen $\Delta_n = \Delta$ erhalten wir somit

$$|E_I| = |E_I^{(n)}| = \sum_{\nu=1}^n (\lambda_\nu + 2). \quad (5.7)$$

Nach Konstruktion von \mathcal{A} gilt somit

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| &= 10 + \sum_{v_\nu \in V_I^{ns}} (3\lambda_\nu - 1) + \sum_{v_\nu \in V_I^s} 3\lambda_\nu - |V_I^s| = 10 + \sum_{\nu=1}^n (3\lambda_\nu - 1) \\ &= 10 + 3|E_I| - 7|V_I| = \dim S_3^1(\Delta). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

5.2 Hermite-Interpolation

Sei Δ eine geordnete Kegeltriangulierung. Im Folgenden definieren wir analog zur Konstruktion der minimal bestimmenden Mengen von $S_3^1(\Delta)$ induktiv Hermite-Interpolationsmengen für $S_3^1(\Delta)$. Dazu benötigen wir die folgende Teilmenge von E . Es sei $\mathcal{E}_H \subset E$ die Vereinigung der folgenden Kanten:

- Ist v_ν , $1 \leq \nu \leq n$, ein nicht singulärer Eckpunkt, der bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ nicht semisingulär ist und gilt $\lambda_\nu \geq 1$, dann sei e_{ν, l_ν} , $l_\nu \in \{1, \dots, \lambda_\nu\}$, so gegeben, dass e_{ν, l_ν} bzgl. v_ν nicht degeneriert ist, und es gelte $e_{\nu, l_\nu} \in \mathcal{E}_H$.
- Für $\nu = 1, \dots, n$ und $l = 1, \dots, \lambda_\nu$ gelte $\tilde{e}_{\nu, l} \in \mathcal{E}_H$, falls $v_{\nu, l-1}$ bzgl. Δ_ν semisingulär vom Typ II ist. Ferner gelte $\tilde{e}_{\nu, \lambda_\nu+1} \in \mathcal{E}_H$, falls $v_{\nu, \lambda_\nu+1}$ bzgl. Δ_ν semisingulär ist und $\tilde{e}_{\nu, \lambda_\nu+1}$ bzgl. $v_{\nu, \lambda_\nu+1}$ nicht degeneriert ist.

Sei $s \in S_3^1(\Delta)$ und $p^{[\nu,l]} := s|_{T^{[\nu,l]}}$, $l = 1, \dots, n_\nu$, $\nu = 1, \dots, n$. Sei $f \in C(\Omega)$ genügend oft differenzierbar. Ferner seien $D^\omega p^{[\nu,l]}$ und $D^\omega f$, $\nu = 1, \dots, n$, $l = 1, \dots, n_\nu$, wie in (2.3) definiert.

Konstruktion von Hermite-Interpolationsmengen:

Nach Konstruktion gilt $\Delta_1 = \Delta(v_1, v_2, v_3) = T^{[1,n_1]}$. Dann erfülle s auf $T^{[1,n_1]}$ die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

- $D^\omega p^{[1,n_1]}(v_1) = D^\omega f(v_1)$ für $\omega = 0, 1, 2$ und
- $p^{[1,n_1]}(v_{1,l}) = f(v_{1,l})$ und $\frac{\partial p^{[1,n_1]}}{\partial \tilde{e}_{1,n_1}}(v_{1,l}) = \frac{\partial f}{\partial \tilde{e}_{1,n_1}}(v_{1,l})$ für $l = n_1 - 1, n_1$.

Sei nun $\nu \geq 1$. Dann erfülle s die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen auf K_ν :

- $\frac{\partial^2 p^{[\nu,l]}}{\partial^2 e_{\nu,l}}(v_\nu) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 e_{\nu,l}}(v_\nu)$, falls $e_{\nu,l} \notin \mathcal{E}_H$, $l = 1, \dots, \lambda_\nu$,
- $p^{[\nu,\lambda_\nu]}(v_{\nu,\lambda_\nu}) = f(v_{\nu,\lambda_\nu})$, falls $\tilde{e}_{\nu,\lambda_\nu+1} \notin \mathcal{E}_H$, und $p^{[\nu,l]}(v_{\nu,l}) = f(v_{\nu,l})$ für $l = 1, \dots, \lambda_\nu - 1$, falls $\lambda_\nu \geq 2$,
- $\frac{\partial p^{[\nu,l]}}{\partial \tilde{e}_{\nu,l}}(v_{\nu,l}) = \frac{\partial f}{\partial \tilde{e}_{\nu,l}}(v_{\nu,l})$, falls $\tilde{e}_{\nu,l} \notin \mathcal{E}_H$, $l = 1, \dots, \lambda_\nu$.

Theorem 5.2. *Sei Δ eine geordnete Kegeltriangulierung. Dann ist V eine Hermite-Interpolationsmenge für $S_3^1(\Delta)$.*

Beweis. Analog zum Beweis von Theorem 5.1 folgt mit den Relationen (2.7) und (2.8) zwischen den partiellen Ableitungen und den Bézier-Koeffizienten von s , dass die Hermite-Interpolationsbedingungen die Bézier-Koeffizienten einer wie in (5.2) gegebenen minimal bestimmenden Menge \mathcal{A}_n von $S_3^1(\Delta)$ eindeutig bestimmen. ■

5.3 Lagrange-Interpolation

Im Folgenden konstruieren wir für eine geordnete Kegeltriangulierung Δ allgemeine Lagrange-Interpolationsmengen für $S_3^1(\Delta)$. Wir wählen dazu zunächst Interpolationspunkte in Δ_0 und anschließend sukzessiv weitere Punkte in $\Delta_\nu \setminus \Delta_{\nu-1}$, $\nu = 1, \dots, n$. Wir benötigen die folgende Teilmenge von E . Es sei $\mathcal{E}_L \subset E$ die Vereinigung der folgenden Kanten:

- Sei v_ν , $1 \leq \nu \leq n$, ein nicht singulärer Eckpunkt, der bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ nicht semisingulär ist, und es gelte $\lambda_\nu \geq 1$. Ist e_{ν,λ_ν} bzgl. v_ν nicht degeneriert, dann gelte $e_{\nu,\lambda_\nu} \in \mathcal{E}_L$. Ist e_{ν,λ_ν} bzgl. v_ν degeneriert, dann sei $l_\nu \in \{1, \dots, \lambda_\nu\}$ so gegeben, dass e_{ν,l_ν} bzgl. v_ν nicht degeneriert ist, und es gelte $e_{\nu,l_\nu} \in \mathcal{E}_L$.

- Für $\nu = 1, \dots, n$ und $l = 1, \dots, \lambda_\nu$ gelte $\tilde{e}_{\nu,l} \in \mathcal{E}_L$, falls $v_{\nu,l-1}$ bzgl. Δ_ν semisingulär vom Typ II ist. Ferner gelte $\tilde{e}_{\nu,\lambda_\nu+1} \in \mathcal{E}_L$, falls $v_{\nu,\lambda_\nu+1}$ bzgl. Δ_ν semisingulär ist und $\tilde{e}_{\nu,\lambda_\nu+1}$ bzgl. $v_{\nu,\lambda_\nu+1}$ nicht degeneriert ist.

Konstruktion von Lagrange-Interpolationsmengen:

Im ersten Schritt wählen wir \mathcal{L}_0 als die Menge der folgenden zehn Punkte in $\Delta_0 = T^{[1,n_1]}$:

- $v_1, v_{1,n_1-1}, v_{1,n_1}$,
- je zwei Punkte im Inneren der Kanten e_{1,n_1-1} , e_{1,n_1} und \tilde{e}_{1,n_1} ,
- einen Punkt im Inneren von $T^{[1,n_1]}$.

Für $\nu = 1, \dots, n$ enthalte \mathcal{L}_ν die folgenden Punkte:

- einen Punkt $w_{\nu,l}$ im Inneren der Kante $e_{\nu,l}$, falls $e_{\nu,l} \notin \mathcal{E}_L$ gilt, $l = 1, \dots, \lambda_\nu$,
- v_{ν,λ_ν} , falls $\tilde{e}_{\nu,\lambda_\nu+1} \notin \mathcal{E}_L$ oder $\tilde{e}_{\nu,\lambda_\nu} \notin \mathcal{E}_L$ gilt oder falls $\tilde{e}_{\nu,\lambda_\nu}, \tilde{e}_{\nu,\lambda_\nu+1} \in \mathcal{E}_L$ gilt und e_{ν,λ_ν} bzgl. v_ν degeneriert ist,
- $v_{\nu,l}$ für $l = 1, \dots, \lambda_\nu - 1$, falls $\lambda_\nu \geq 2$ gilt, und
- einen Punkt $\tilde{w}_{\nu,l}$ im Inneren der Kante $\tilde{e}_{\nu,l}$, falls $\tilde{e}_{\nu,l} \notin \mathcal{E}_L$ gilt, $l = 1, \dots, \lambda_\nu$.

Dann setzen wir $\mathcal{L} := \cup_{\nu=0}^n \mathcal{L}_\nu$.

Theorem 5.3. *Sei Δ eine geordnete Kegeltriangulierung. Dann ist \mathcal{L} eine Lagrange-Interpolationsmenge für $S_3^1(\Delta)$.*

Beweis. Sei $s \in S_3^1(\Delta)$, und es gelte $s(z) = 0$ für alle $z \in \mathcal{L}$. Wir zeigen im Folgenden, dass gilt:

$$s(z) = 0, \quad z \in \cup_{\mu=0}^\nu \mathcal{L}_\mu \quad \Rightarrow \quad s|_{\Omega_\nu} \equiv 0, \quad \nu = 0, \dots, n. \quad (5.8)$$

Beweis von (5.8) durch vollständige Induktion nach ν .

Induktionsanfang $\nu = 0$. Sei l_1 eine beliebige Gerade durch den Punkt von \mathcal{L}_0 , der im Inneren von $T^{[1,n_1]}$ liegt. Ferner sei l_2, l_3 und l_4 eine Gerade, so dass die Kante e_{1,n_1-1} , e_{1,n_1} bzw. \tilde{e}_{1,n_1} auf der Gerade liegt. Dann gilt für $i = 1, 2, 3, 4$, dass genau i Punkte von \mathcal{L}_0 auf l_i liegen, die nicht auf l_j , $j > i$, liegen. Somit folgt, dass \mathcal{L}_0 eine Lagrange-Interpolationsmenge für $S_3^1(\Delta_0)$ ist (vgl. Nürnberger & Zeilfelder [49]).

Induktionsschritt $\nu - 1 \rightarrow \nu$. Die Behauptung (5.8) sei für $\nu - 1$ bereits bewiesen. D. h. es gilt $s|_{\Omega_{\nu-1}} \equiv 0$. Für $l = 1, \dots, \lambda_\nu + 1$ sei $p^{[\nu,l]} := s|_{T^{[\nu,l]}}$ in der BB-Darstellung (2.5)

gegeben. Dann ist zu zeigen, dass $p^{[\nu,l]} \equiv 0$ für $l = 1, \dots, \lambda_\nu + 1$ gilt. Aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen an den Randkanten von $\Delta_{\nu-1}$ und am Eckpunkt v_ν erhalten wir direkt

$$\lambda_P s = 0, \quad P \in R_1(K_\nu), \quad (5.9)$$

wobei $R_1(K_\nu)$ wie in (4.2) gegeben ist, falls v bzgl. Δ_ν nicht semisingulär vom Typ II ist, und anderenfalls wie in (4.3).

Wir betrachten zunächst den Fall $\lambda_\nu = 1$. Gilt $\tilde{e}_{\nu,1} \in \mathcal{E}_L$, d. h. ist $v_{\nu,0}$ semisingulär bzgl. Δ_ν , folgt analog zum Beweis von Theorem 5.1 $a_{0,2,1}^{[\nu,1]} = 0$. Gilt $\tilde{e}_{\nu,2} \in \mathcal{E}_L$, d. h. ist $v_{\nu,2}$ semisingulär bzgl. Δ_ν und ist ferner $\tilde{e}_{\nu,2}$ bzgl. $v_{\nu,2}$ nicht degeneriert, dann folgt ebenfalls analog zum Beweis von Theorem 5.1 $a_{0,1,2}^{[\nu,2]} = 0$.

Ist $e_{\nu,1}$ bzgl. v_ν nicht degeneriert, folgt mit (5.9) sowie aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen an der Kante $e_{\nu,1}$ direkt $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in D_2(v_\nu)$. Gilt nun $\tilde{e}_{\nu,1} \in \mathcal{E}_L$ und $\tilde{e}_{\nu,2} \notin \mathcal{E}_L$, folgt nach Konstruktion von \mathcal{L}_ν $p^{[\nu,1]}(v_{\nu,1}) = a_{0,3,0}^{[\nu,1]} = 0$. Wir erhalten dann mit $a_{0,2,1}^{[\nu,1]} = 0$ bereits $s|_{T^{[\nu,1]}} \equiv 0$. Aus der C^1 -Stetigkeitsbedingung an der Kante $e_{\nu,1}$ folgt somit die Behauptung. Gilt $\tilde{e}_{\nu,1} \notin \mathcal{E}_L$ und $\tilde{e}_{\nu,2} \in \mathcal{E}_L$, erhalten wir analog zum vorherigen Fall $s|_{\Omega_\nu} \equiv 0$. Gilt sowohl $\tilde{e}_{\nu,1} \in \mathcal{E}_L$ als auch $\tilde{e}_{\nu,2} \in \mathcal{E}_L$, dann folgt insbesondere $a_{1,2,0}^{[\nu,1]} = a_{0,2,1}^{[\nu,1]} = a_{0,1,2}^{[\nu,2]} = 0$. Aus der C^1 -Stetigkeitsbedingung auf $D_1(v_{\nu,1})$ folgt dann die Behauptung.

Sei nun $e_{\nu,1}$ bzgl. v_ν degeneriert. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $\tilde{e}_{\nu,1} \in \mathcal{E}_L$ und $\tilde{e}_{\nu,2} \notin \mathcal{E}_L$ gilt. Dann folgt für $\tilde{q}_{\nu,2} = p^{[\nu,2]}|_{\tilde{e}_{\nu,2}} \in \Pi_3$, dass

$$\tilde{q}_{\nu,2}(v_{\nu,2}) = \tilde{q}'_{\nu,2}(v_{\nu,2}) = \tilde{q}_{\nu,2}(\tilde{w}_{\nu,2}) = \tilde{q}_{\nu,2}(v_{\nu,1}) = 0$$

und somit $p^{[\nu,2]}(z) = 0$, $z \in \tilde{e}_{\nu,2}$, gilt. Insbesondere sind somit alle partiellen Ableitungen von $p^{[\nu,2]}$ entlang der Kante $\tilde{e}_{\nu,2}$ an der Stelle $v_{\nu,2}$ identisch Null, so dass mit den Relationen (2.8) $a_{0,1,2}^{[\nu,2]} = a_{0,0,3}^{[\nu,2]} = 0$ folgt. Wegen $a_{0,2,1}^{[\nu,1]} = 0$ und aus der C^1 -Stetigkeitsbedingung auf $D_1(v_{\nu,1})$ folgt dann bereits die Behauptung. Gilt $\tilde{e}_{\nu,1} \notin \mathcal{E}_L$ und $\tilde{e}_{\nu,2} \in \mathcal{E}_L$, erhalten wir analog zum vorherigen Fall $s|_{\Omega_\nu} \equiv 0$. Gilt sowohl $\tilde{e}_{\nu,1} \in \mathcal{E}_L$ als auch $\tilde{e}_{\nu,2} \in \mathcal{E}_L$, dann folgt analog zum Fall, dass $\tilde{e}_{\nu,1} \in \mathcal{E}_L$ als auch $\tilde{e}_{\nu,2} \notin \mathcal{E}_L$ gilt, $p^{[\nu,2]}(z) = 0$, $z \in \tilde{e}_{\nu,2}$, und $p^{[\nu,1]}(z) = 0$, $z \in \tilde{e}_{\nu,1}$. Somit gilt insbesondere $a_{0,3,0}^{[\nu,1]} = a_{0,2,1}^{[\nu,1]} = a_{0,1,2}^{[\nu,2]} = 0$, so dass aus der C^1 -Stetigkeitsbedingung auf $D_1(v_{\nu,1})$ ebenfalls die Behauptung folgt.

Sei nun $\lambda_\nu \geq 2$. Ist e_{ν,λ_ν} bzgl. v_ν nicht degeneriert, dann folgt nach Konstruktion von \mathcal{L}_ν und mit (5.9), dass für $\tilde{q}_{\nu,l} = p^{[\nu,l]}|_{e_{\nu,l}} \in \Pi_3$

$$\tilde{q}_{\nu,l}(v_\nu) = \tilde{q}'_{\nu,l}(v_\nu) = \tilde{q}_{\nu,l}(w_{\nu,l}) = \tilde{q}_{\nu,l}(v_{\nu,l}) = 0, \quad l = 1, \dots, \lambda_\nu - 1,$$

und somit $p^{[\nu,l]}(z) = 0$, $z \in e_{\nu,l}$, für $l = 1, \dots, \lambda_\nu - 1$ gilt. Insbesondere gilt somit $a_{1,2,0}^{[\nu,l]} = 0$, $l = 1, \dots, \lambda_\nu - 1$, so dass mit (5.9) und aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen auf $D_2(v_\nu)$

$$\lambda_P s = 0, \quad P \in D_2(v_\nu), \quad (5.10)$$

folgt. Ist e_{ν, λ_ν} bzgl. v_ν degeneriert, folgt mit (5.9) aus der C^1 -Stetigkeitsbedingung an der Kante e_{ν, λ_ν} $a_{1,1,1}^{[\nu, \lambda_\nu]} = 0$. Analog zu dem Fall, dass e_{ν, λ_ν} bzgl. v_ν nicht degeneriert ist, erhalten wir dann

$$\lambda_P s = 0, \quad P \in D_2(v_\nu) \setminus \{P_{1,2,0}^{[\nu, \lambda_\nu]}\}. \quad (5.11)$$

Ist $v_{\nu,0}$ semisingulär bzgl. Δ_ν , dann folgt analog zum Beweis von Theorem 5.1 $a_{0,2,1}^{[\nu,1]} = 0$. Nach Voraussetzung gilt ferner $s(v_{\nu,1}) = a_{0,3,0}^{[\nu,1]} = 0$, so dass mit (5.10) oder (5.11) bereits $s|_{T^{[\nu,1]}} = 0$ folgt. Ist $v_{\nu,0}$ nicht semisingulär bzgl. Δ_ν , dann gilt für $\tilde{q}_{\nu,1} = p^{[\nu,1]}|_{\tilde{e}_{\nu,1}} \in \Pi_3$

$$\tilde{q}_{\nu,1}(v_{\nu,0}) = \tilde{q}_{\nu,1}'(v_{\nu,0}) = \tilde{q}_{\nu,1}(\tilde{w}_{\nu,1}) = \tilde{q}_{\nu,1}(v_{\nu,1}) = 0$$

und somit $p^{[\nu,1]}(z) = 0$, $z \in \tilde{e}_{\nu,1}$. Insbesondere sind dann alle partiellen Ableitungen von $p^{[\nu,1]}$ entlang der Kante $\tilde{e}_{\nu,1}$ an der Stelle $v_{\nu,1}$ identisch Null, so dass $a_{0,3,0}^{[\nu,1]} = a_{0,2,1}^{[\nu,1]} = 0$ gilt. Somit folgt $s|_{T^{[\nu,1]}} \equiv 0$. Sukzessives Wiederholen dieses Arguments für $l = 2, \dots, \lambda_\nu - 1$ ergibt $s|_{T^{[\nu,l]}} \equiv 0$, $l = 1, \dots, \lambda_\nu - 1$. Analog zum Fall $\lambda_\nu = 1$ folgt schließlich $s|_{\Omega_\nu} \equiv 0$.

Es bleibt zu zeigen, dass $|\mathcal{L}| = \dim S_3^1(\Delta)$ gilt. Sei $V_I^{ns} \subset V_I$ die Menge der Eckpunkte aus v_ν , $\nu = 1, \dots, n$, die bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ nicht semisingulär sind. Ferner bezeichne $V_I^s \subset V_I$ die Menge der Eckpunkte aus v_ν , $\nu = 1, \dots, n$, die bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ semisingulär sind. Dann gilt offensichtlich $n = |V_I| = |V_I^{ns}| + |V_I^s|$. Analog zu (5.7) gilt ferner $|E_I| = \sum_{\nu=1}^n (\lambda_\nu + 2)$. Nach Konstruktion von $|\mathcal{L}|$ gilt somit

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}| &= 10 + \sum_{v_\nu \in V_I^{ns}} (3\lambda_\nu - 1) + \sum_{v_\nu \in V_I^s} 3\lambda_\nu - |V_I^s| = 10 + \sum_{\nu=1}^n (3\lambda_\nu - 1) \\ &= 10 + 3|E_I| - 7|V_I| = \dim S_3^1(\Delta). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Kapitel 6

Der Splineraum $S_4^1(\Delta)$

In diesem Kapitel betrachten wir den Splineraum $S_4^1(\Delta)$. Für beliebige Triangulierungen konstruierten Alfeld, Piper & Schumaker [2] eine spezielle minimal bestimmende Menge von $S_4^1(\Delta)$. Dabei verwendeten sie eine nicht lokale Methode, die auf Argumenten der Grafentheorie beruht. Eine direkte Umsetzung der von Alfeld, Piper und Schumaker gegebenen minimal bestimmenden Menge in ein Hermite-Interpolationsschema für $S_4^1(\Delta)$ ist nicht möglich. Alfeld, Piper und Schumaker zeigten jedoch, dass ein Spline in $S_4^1(\Delta)$ existiert, der an den Eckpunkten von Δ mit einer gegebenen Funktion übereinstimmt. Ähnliche Resultate für Funktionswerte und Gradienten an den Eckpunkten der Triangulierung wurden von Gao [26], Chui & Hong [12] und Nadler [43] erzielt, wobei gewisse Einschränkungen an die Triangulierung gestellt werden. Davydov & Nürnberger [18] entwickelten eine induktive Methode zur Konstruktion einer Hermite-Interpolationsmenge für $S_4^1(\Delta)$, wobei die Triangulierung Δ jedoch modifiziert werden muss, falls gewisse Semisingularitäten auftreten.

Wir bezeichnen Δ als eine Triangulierung vom Grad $\leq n$, falls $\deg(v) \leq n$ für alle inneren Eckpunkte v von Δ gilt. In Abschnitt 6.1 betrachten wir beliebige Triangulierungen vom Grad ≤ 7 . Wir durchlaufen eine solche Triangulierung induktiv mittels Algorithmus 2 aus Abschnitt 3.1. Durch einen direkten Ansatz konstruieren wir unter Verwendung der Resultate aus Kapitel 4 allgemeine Klassen minimal bestimmender Mengen von $S_4^1(\Delta)$. Aus der Beschreibung dieser minimal bestimmenden Mengen erhalten wir auf Grund der Relationen zwischen den Bézier-Koeffizienten eines Splines und seinen partiellen Ableitungen direkt allgemeine Hermite-Interpolationsschemas für $S_4^1(\Delta)$. Dabei werden für fast alle Eckpunkte der Triangulierung sowohl der Funktionswert als auch die partiellen Ableitungen ersten Grades interpoliert. In Abschnitt 6.2 betrachten wir beliebige Triangulierungen, wobei wir in einzelnen Fällen gewisse Bedingungen an einen Eckpunkt stellen. Für diese Klasse von Triangulierungen gelingt es uns ebenfalls, eine große Klasse minimal

bestimmender Mengen von $S_4^1(\Delta)$ zu konstruieren. Aus der Beschreibung der minimal bestimmenden Mengen ergeben sich wiederum allgemeine Hermite-Interpolationsmengen. In diesem Fall werden für alle Eckpunkte der Triangulierung der Funktionswert und die Ableitungen ersten Grades interpoliert werden. Abschnitt 6.3 enthält numerische Beispiele zu unserem Interpolationsverfahren aus Abschnitt 6.1. Insbesondere zeigen wir, dass unser Verfahren in Tests sowohl für uniforme Triangulierungen als auch für Delaunay-Triangulierungen aus zufällig verteilten Punkten numerisch die Approximationsordnung vier erreicht.

Sei im Folgenden Δ eine beliebige Triangulierung von Ω . Wir durchlaufen Δ nach Algorithmus 2 aus Abschnitt 3.1. Setzen wir $n = |\tilde{V}_B| + |V_I|$, liefert uns Algorithmus 2 eine Indizierung v_ν , $\nu = 1, \dots, n$, der Eckpunkte aus $V_I \cup \tilde{V}_B$. Dabei bezeichne \tilde{V}_B die Menge der Randpunkte von Δ , von denen nur Randkanten ausgehen. Ferner liefert uns Algorithmus 2 eine Kette $\Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \dots \subset \Delta_n = \Delta$ von Teiltriangulierungen von Δ . Nach Konstruktion gilt

$$\begin{aligned}\Delta_1 &:= \Delta_{v_1}, \\ \Delta_\nu &:= \Delta_{\nu-1} \cup K_\nu, \quad \nu = 2, \dots, n,\end{aligned}$$

mit

$$K_\nu := \begin{cases} \cup_{T \in \Delta_{v_\nu} \setminus \Delta_{\nu-1}} T, & \text{falls } v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}, \\ \cup_{T \in \Delta_{v_\nu}} T, & \text{falls } v_\nu \notin V_B^{(\nu-1)} \text{ und } v_\nu \in V_I, \\ \Delta(v_\nu, w, w'), & \text{falls } v_\nu \notin V_B^{(\nu-1)} \text{ und } v_\nu \in V_B, \end{cases}$$

wobei im Fall $v_\nu \in V_B \setminus V_B^{(\nu-1)}$ die Eckpunkte w, w' benachbarte Randpunkte von $\Delta_{\nu-1}$ sind und ferner $\Delta(v_\nu, w, w') \in \Delta_{v_\nu}$ gilt. Für $\nu = 0, \dots, n$ bezeichne $V_I^{(\nu)}$ die Menge der inneren Eckpunkte, $V_B^{(\nu)}$ die Menge der Randpunkte, $E_I^{(\nu)}$ die Menge der inneren Kanten und $E_B^{(\nu)}$ die Menge der Randkanten von Δ_ν . Ferner bezeichne $S^{(\nu)}$ die Anzahl der singulären Eckpunkte von Δ_ν .

Wir betrachten die Zelle Δ_{v_ν} eines Eckpunkts v_ν . Es sei $n_\nu = \deg(v_\nu)$. Wir nummerieren die Randpunkte der Zelle Δ_{v_ν} gegen den Uhrzeigersinn mit $v_{\nu,0}, \dots, v_{\nu,n_\nu-1}$. Ferner sei für $l = 1, \dots, n_\nu$ das Dreieck $T^{[\nu,l]}$ gegeben durch $T^{[\nu,l]} = \Delta(v_\nu, v_{\nu,l-1}, v_{\nu,l})$. Die Indizes l sind hierbei sowie im Folgenden stets als l modulo n_ν zu verstehen.

Ist $v_\nu \in V_I \cap V_B^{(\nu)}$, dann gelte

$$K_\nu = \{T^{[\nu,l]} : l = 1, \dots, \lambda_\nu\}.$$

Ist v_ν hingegen ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, dann gelte

$$K_\nu = \begin{cases} \{T^{[\nu,l]} : l = 1, \dots, n_\nu\}, & \text{falls } v_\nu \in V_I, \\ \Delta(v_\nu, v_{\nu,0}, v_{\nu,1}), & \text{falls } v_\nu \in V_B, \end{cases} \quad \text{mit } [v_{\nu,0}, v_{\nu,1}] \in E_B^{(\nu-1)}$$

Ferner definieren wir für v_ν , $\nu = 1, \dots, n$,

$d_\nu :=$ Anzahl der inneren Kanten von K_ν , die bzgl. v_ν degeneriert sind.

Definition 6.1. Für $\nu \in \{2, \dots, n\}$ sei v_ν ein Fillpunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$. Dann bezeichnen wir v_ν als *semisingulären Fillpunkt* bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, wenn sowohl $e_{\nu,0}$ als auch $e_{\nu,1}$ bzgl. v_ν degeneriert sind.

6.1 Beliebige Triangulierungen vom Grad ≤ 7

Im Folgenden sei Δ eine beliebige Triangulierung vom Grad ≤ 7 . Wir konstruieren zunächst eine große Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_4^1(\Delta)$. Darauf basierend ergeben sich aufgrund der Relationen zwischen den Bézier-Koeffizienten und den partiellen Ableitungen eines Splines direkt allgemeine Hermite-Interpolationsschemas für $S_4^1(\Delta)$ mit der Eigenschaft, dass bis auf wenige Ausnahmen an allen Eckpunkten der Triangulierung sowohl der Funktionswert als auch die partiellen Ableitungen ersten Grades interpoliert werden.

6.1.1 Minimal bestimmende Mengen

Im Folgenden konstruieren wir induktiv eine große Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_4^1(\Delta)$. Ist \mathcal{A}_ν eine minimal bestimmende Menge von $S_4^1(\Delta_\nu)$, dann bestimmt \mathcal{A}_ν in der Regel auch $S_4^1(\Delta_{\nu+1})$ eindeutig auf $\mathcal{B}_4(\Delta_\nu) \cup R_1(K_{\nu+1})$, wobei $R_1(K_{\nu+1})$ wie in (4.2) oder (4.3) gegeben ist. Eine Ausnahme besteht lediglich dann, wenn der nicht singuläre Eckpunkt $v_{\nu+1}$ entweder bzgl. Δ_ν semisingulär ist oder $\lambda_{\nu+1} = 0$ gilt. In diesen Fällen ist $S_4^1(\Delta_{\nu+1})$ auf einem der BB-Punkte in $D_2(v_{\nu+1})$ überbestimmt. Wir werden zeigen, dass wir in dieser Situation nachträglich einen geeigneten BB-Punkt P aus \mathcal{A}_ν entfernen können, so dass $\mathcal{A}_\nu \setminus \{P\}$ $S_4^1(\Delta_{\nu+1})$ eindeutig auf $\mathcal{B}_4(\Delta_\nu) \cup R_1(K_{\nu+1})$ bestimmt.

Konstruktion minimal bestimmender Mengen:

Die Mengen \mathcal{A}_ν , $\nu = 0, \dots, n$, seien induktiv wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &:= \mathcal{B}_4(T^{[1,n_1]}), \\ \mathcal{A}_\nu &:= (\mathcal{A}_{\nu-1} \setminus \mathcal{P}_\nu) \cup \mathcal{A}_{K_\nu}, \quad \nu = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Die Mengen \mathcal{A}_{K_ν} und \mathcal{P}_ν seien dabei wie im Folgenden definiert.

Fall 1: $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ und $\lambda_\nu \geq 1$.

Dann sei die Menge \mathcal{A}_{K_ν} wie in (4.36) gegeben, falls v_ν nicht semisingulär bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ ist, und anderenfalls sei die Menge \mathcal{A}_{K_ν} wie in (4.37) gegeben. \mathcal{A}_{K_ν} erfülle ferner die folgende Bedingung.

(6.2) Es gelte $|\mathcal{A}_{K_\nu} \cap D_1(v_{\nu,l})| = 3$ für $l = 1, \dots, \lambda_\nu$ und

$$|\mathcal{A}_{K_\nu} \cap D_2(v_\nu)| = \begin{cases} \lambda_\nu - 1, & \text{falls } v_\nu \text{ bzgl. } \Delta_{\nu-1} \text{ nicht semisingulär ist,} \\ \lambda_\nu, & \text{falls } v_\nu \text{ bzgl. } \Delta_{\nu-1} \text{ semisingulär ist.} \end{cases}$$

Ferner sei \mathcal{P}_ν gegeben durch

$$\mathcal{P}_\nu = \begin{cases} \{P_\nu\}, & \text{falls } v_\nu \text{ nicht singulär und bzgl. } \Delta_{\nu-1} \text{ semisingulär ist,} \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit

$$P_\nu \in \begin{cases} \{P_{2,0,2}^{[\nu,1]}, P_{2,2,0}^{[\nu,\lambda_\nu]}\}, & \text{falls weder } e_{\nu,0} \text{ noch } e_{\nu,\lambda_\nu} \text{ bzgl. } v_\nu \text{ degeneriert ist,} \\ \{P_{2,0,2}^{[\nu,1]}\}, & \text{falls } e_{\nu,\lambda_\nu} \text{ bzgl. } v_\nu \text{ degeneriert ist,} \\ \{P_{2,2,0}^{[\nu,\lambda_\nu]}\}, & \text{falls } e_{\nu,0} \text{ bzgl. } v_\nu \text{ degeneriert ist.} \end{cases}$$

Fall 2: $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ ist ein nicht singulärer Eckpunkt von Δ und es gilt $\lambda_\nu = 0$. Mindestens eine der beiden Kanten $e_{\nu,0}$ und $e_{\nu,1}$ ist bzgl. v_ν nicht degeneriert.

Dann sei $\mathcal{A}_{K_\nu} = \{P_{0,2,2}^{[\nu,1]}\}$. Ferner gelte $\mathcal{P}_\nu = \{P_\nu\}$ mit

$$P_\nu \in \begin{cases} \{P_{2,0,2}^{[\nu,1]}, P_{2,2,0}^{[\nu,1]}\}, & \text{falls weder } e_{\nu,0} \text{ noch } e_{\nu,1} \text{ bzgl. } v_\nu \text{ degeneriert ist,} \\ \{P_{2,0,2}^{[\nu,1]}\}, & \text{falls } e_{\nu,1} \text{ bzgl. } v_\nu \text{ degeneriert ist,} \\ \{P_{2,2,0}^{[\nu,1]}\}, & \text{falls } e_{\nu,0} \text{ bzgl. } v_\nu \text{ degeneriert ist.} \end{cases}$$

Fall 3: $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ ist ein nicht singulärer Eckpunkt von Δ und es gilt $\lambda_\nu = 0$. Sowohl $e_{\nu,0}$ als auch $e_{\nu,1}$ sind bzgl. v_ν degeneriert.

a) n_ν ist ungerade.

Dann sei $\mathcal{A}_{K_\nu} = \{P_{0,2,2}^{[\nu,1]}\}$ und $\mathcal{P}_\nu = \{P_{2,1,1}^{[\nu,l]} : l = 2, \dots, n_\nu\}$.

b) Es gilt $n_\nu = 6$ und für $l = 2, \dots, 5$ ist $e_{\nu,l}$ nicht bzgl. $v_{\nu,l}$ degeneriert.

Dann sei $\mathcal{A}_{K_\nu} = \{P_{4,0,0}^{[\nu,1]}, P_{3,1,0}^{[\nu,2]}, P_{2,1,1}^{[\nu,2]}, P_{0,2,2}^{[\nu,1]}\}$ und $\mathcal{P}_\nu = D_1(v_\nu) \cup \{P_{2,1,1}^{[\nu,l]} : l = 2, \dots, n_\nu\}$.

c) Es gilt $n_\nu = 6$ und mindestens eine der Kanten $e_{\nu,l}$, $l \in \{2, \dots, 5\}$, ist bzgl. $v_{\nu,l}$ degeneriert.

Es sei $\tilde{l} \in \{2, \dots, 5\}$ so gegeben, dass $e_{\nu,\tilde{l}}$ bzgl. $v_{\nu,\tilde{l}}$ degeneriert ist. Dann gelte $\mathcal{A}_{K_\nu} = \{P_{0,2,2}^{[\nu,1]}\}$ und $\mathcal{P}_\nu = \{P_{2,2,0}^{[\nu,\tilde{l}]}\}$.

Fall 4: $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ ist singulär und es gilt $\lambda_\nu = 0$.

Dann sei $\mathcal{A}_{K_\nu} = \{P_{0,2,2}^{[\nu,1]}\}$ und $\mathcal{P}_\nu = \emptyset$.

Fall 5: v_ν ist ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$.

Gilt $v_\nu \in V_I$, bestehe \mathcal{A}_{K_ν} aus den folgenden BB-Punkten:

(6.3) $\mathcal{A}_{K_\nu} \cap D_2(v_\nu)$ sei eine minimal bestimmende Menge von $S_4^1(\Delta)$ auf $D_2(v_\nu)$. Für $l = 1, \dots, n_\nu - 2$ enthalte \mathcal{A}_{K_ν} drei nicht kollineare BB-Punkte aus $D_1(v_{\nu,l})$ und einen BB-Punkt aus $\{P_{1,2,1}^{[\nu,l]}, P_{1,1,2}^{[\nu,l+1]}\}$. Ferner gelte $\{P_{0,2,2}^{[\nu,l]} : l = 1, \dots, n_\nu - 1\} \subset \mathcal{A}_{K_\nu}$.

Ist $v_\nu \in V_B$, dann gelte $\mathcal{A}_{K_\nu} = \{P_{i,j,k}^{[\nu,1]} : i > 1\}$. Ferner gelte in beiden Fällen $\mathcal{P}_\nu = \emptyset$.

Theorem 6.2. *Sei Δ eine beliebige Triangulierung vom Grad ≤ 7 . Dann ist \mathcal{A}_n wie in (6.1) eine minimal bestimmende Menge von $S_4^1(\Delta)$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass \mathcal{A}_n eine bestimmende Menge von $S_4^1(\Delta)$ ist. Sei $s \in S_4^1(\Delta)$, und es gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}_n$. Dann ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_4(\Delta)$ gilt.

Wir zeigen, dass Folgendes gilt:

$$\lambda_P s = 0, \quad P \in \mathcal{A}_\nu \quad \Rightarrow \quad \lambda_P s = 0, \quad P \in \mathcal{B}_4(\Delta_\nu), \quad \nu = 0, \dots, n. \quad (6.4)$$

Da $\Delta_n = \Delta$ gilt, folgt aus (6.4), dass \mathcal{A}_n eine bestimmende Menge von $S_4^1(\Delta)$ ist.

Beweis von (6.4) durch vollständige Induktion nach ν .

Induktionsanfang $\nu = 0$. Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}_4(T^{[0]})$. Somit erhalten wir direkt $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_4(\Delta_0)$.

Induktionsschritt $\nu-1 \rightarrow \nu$. Die Behauptung (6.4) sei für $\nu-1$ bereits bewiesen. Die Menge $R_1(K_\nu)$ sei wie in (4.2) gegeben, falls v_ν bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ nicht semisingulär vom Typ II ist. Anderenfalls sei $R_1(K_\nu)$ wie in (4.3) gegeben.

Fall 1: Es gilt $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ und $\lambda_\nu \geq 1$.

Sei zunächst v_ν singulär oder sei v_ν bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ nicht semisingulär. Nach Induktionsannahme und aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen am Rand von $\Delta_{\nu-1}$ folgt $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_4(\Delta_{\nu-1}) \cup R_1(K_\nu)$. Aus Theorem 4.6 folgt dann bereits (6.4).

Sei nun v_ν nicht singulär und semisingulär bzgl. $\Delta_{\nu-1}$. O.B.d.A. sei $e_{\nu,0}$ bzgl. v_ν nicht degeneriert und es gelte $P_\nu = P_{2,0,2}^{[\nu,1]}$. Dann gilt offensichtlich

$$\lambda_P s = 0, \quad P \in \mathcal{A}_{\nu-1} \setminus \{P_{2,0,2}^{[\nu,1]}\} \quad \Rightarrow \quad \lambda_P s = 0, \quad P \in \mathcal{B}_4(\Delta_{\nu-1}) \setminus \{P_{2,0,2}^{[\nu,1]}\}.$$

Aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen und der Induktionsannahme folgt somit, dass $\lambda_P s = 0$, $P \in R_1(K_\nu) \setminus \{P_{2,0,2}^{[\nu,1]}, P_{1,1,2}^{[\nu,1]}\}$, gilt. Mit den C^1 -Stetigkeitsbedingungen an der Kante $e_{\nu,0}$ erhalten wir dann $\lambda_P s = 0$, $P \in R_1(K_\nu)$. Dann folgt aber bereits mit Theorem 4.6 die Behauptung, da $\mathcal{A}_{K_\nu} \subset \mathcal{A}_\nu$ gilt. Für $P_\nu = P_{2,2,0}^{[\nu,\lambda_\nu]}$ folgt die Behauptung analog.

Fall 2: $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ ist ein nicht singulärer Eckpunkt von Δ und es gilt $\lambda_\nu = 0$. Mindestens eine der beiden Kanten $e_{\nu,0}$ und $e_{\nu,1}$ sei bzgl. v_ν nicht degeneriert.

Analog zum Beweis von Fall 1 erhalten wir $\lambda_P s = 0$, $P \in R_1(K_\nu)$. Mit $P_{0,2,2}^{[\nu,1]} \in \mathcal{A}_\nu$ folgt dann die Behauptung.

Fall 3: $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ ist ein nicht singulärer Eckpunkt von Δ und es gilt $\lambda_\nu = 0$. Sowohl $e_{\nu,0}$ als auch $e_{\nu,1}$ seien bzgl. v_ν degeneriert.

Nach Voraussetzung ist v_ν ein Randpunkt von $\Delta_{\nu-1}$. Somit existiert ein $\mu < \nu$, so dass $\Delta_\mu = \Delta_{\mu-1} \cup K_\mu$ gilt und ferner v_ν ein Randpunkt von K_μ ist. Offensichtlich ist dann v_μ auch ein Randpunkt von Δ_{v_ν} und für ein $l^* \in \{2, \dots, n_\nu - 1\}$ gilt somit $v_{\nu,l^*} = v_\mu$.

Nach Konstruktion folgt wegen (6.2) und (6.3), dass \mathcal{A}_{K_μ} drei nicht kollineare BB-Punkte aus $D_1(v_\nu)$ und einen der beiden BB-Punkte $P_{2,1,1}^{[\nu,l^*]}$ und $P_{2,1,1}^{[\nu,l^*+1]}$ enthält. Ist e_{ν,l^*} bzgl. v_{ν,l^*} degeneriert, folgt wegen (6.2) und (6.3) insbesondere $P_{2,2,0}^{[\nu,l^*]} \in \mathcal{A}_{\nu-1}$. Ist e_{ν,l^*} bzgl. v_{ν,l^*} nicht degeneriert, folgt aus der C^1 -Stetigkeitsbedingungen an der Kante e_{ν,l^*} , entweder $P_{2,2,0}^{[\nu,l^*]} \in \mathcal{A}_{\nu-1}$ oder $S_4^1(\Delta)$ ist durch die C^1 -Stetigkeitsbedingungen auf $D_2(v_{\nu,l^*})$ auf $P_{2,2,0}^{[\nu,l^*]}$ bestimmt.

Betrachten wir die restlichen Randpunkte der Zelle Δ_{v_ν} , dann gibt es ferner Indizes μ_l , $l = 2, \dots, n_\nu - 1$ und $l \neq l^*$, mit $\mu < \mu_l \leq \nu - 1$, so dass $v_{\mu_l} = v_{\nu,l}$ gilt. Nach Konstruktion der Teiltriangulierungen Δ_τ , $\tau = \mu, \dots, \nu - 1$, wird nur dann die Zelle eines Flappunkts zu Δ_τ hinzugefügt, wenn keiner der Randpunkte von Δ_τ ein innerer Eckpunkt von Δ ist. Da v_ν jedoch ein Randpunkt von Δ_μ und somit auch von Δ_τ , $\tau = \mu + 1, \dots, \nu - 1$, ist und ferner $v_\nu \in V_I$ gilt, folgt für $l = 2, \dots, n_\nu - 1$, $l \neq l^*$, dass v_{μ_l} ein Randpunkt von Δ_{μ_l} ist. Ist $e_{\nu,l}$ bzgl. $v_{\mu_l} = v_{\nu,l}$ degeneriert, folgt nach Konstruktion $P_{2,2,0}^{[\nu,l]} \in \mathcal{A}_{\nu-1}$. Ist $e_{\nu,l}$ bzgl. $v_{\nu,l}$ nicht degeneriert, nach Konstruktion der Mengen $\mathcal{A}_{K_{\mu_l}}$, dass entweder $P_{2,2,0}^{[\nu,l]} \in \mathcal{A}_{\nu-1}$ gilt oder $S_4^1(\Delta)$ auf $P_{2,2,0}^{[\nu,l]}$ durch die C^1 -Stetigkeitsbedingungen auf $D_2(v_{\mu_l})$ bestimmt ist.

Wir zeigen nun, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in D_2(v_\nu)$ gilt.

a) n_ν ist ungerade. Wegen $\mathcal{P}_\nu \subset D_1(v_\nu) \cup \{P_{2,1,1}^{[\nu,l]} : l = 2, \dots, n_\nu\}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda_P s &= 0, \quad P \in \mathcal{A}_{\nu-1} \setminus \mathcal{P}_\nu \\ \Rightarrow \lambda_P s &= 0, \quad P \in \mathcal{B}_4(\Delta_{\nu-1}) \setminus (D_1(v_\nu) \cup \{P_{2,1,1}^{[\nu,l]} : l = 1, \dots, n_\nu\}). \end{aligned} \tag{6.5}$$

\mathcal{A}_ν enthält nach Konstruktion drei nicht kollineare BB-Punkte aus $D_1(v_\nu)$. Es folgt $\lambda_P s = 0$, $P \in D_1(v_\nu)$. Wegen (6.5) gilt ferner $\lambda_P s = 0$, $P \in \{P_{2,2,0}^{[\nu,l]} : l = 1, \dots, n_\nu\}$. Aus Lemma 4.12 folgt dann $\lambda_P s = 0$, $P \in D_2(v_\nu)$.

b) Es gilt $n_\nu = 6$ und für $l = 2, \dots, 5$ ist $e_{\nu,l}$ nicht bzgl. $v_{\nu,l}$ degeneriert. Da $\mathcal{P}_\nu \subset D_1(v_\nu) \cup \{P_{2,1,1}^{[\nu,l]} : l = 2, \dots, n_\nu\}$ gilt, erhalten wir ebenfalls (6.5), und nach Voraussetzung folgt $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \{P_{4,0,0}^{[\nu,1]}, P_{3,1,0}^{[\nu,2]}, P_{2,1,1}^{[\nu,2]}\} \cup \{P_{2,2,0}^{[\nu,l]} : l = 1, \dots, 6\}$. Aus Lemma 4.14 folgt dann $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in D_2(v_\nu)$.

c) Es gilt $n_\nu = 6$ und mindestens eine der Kanten $e_{\nu,l}$, $l \in \{2, \dots, 5\}$, ist bzgl. $v_{\nu,l}$ degeneriert. Sei $\tilde{l} \in \{2, \dots, 5\}$ so gegeben, dass $e_{\nu,\tilde{l}}$ bzgl. $v_{\nu,\tilde{l}}$ degeneriert ist und $\mathcal{P}_\nu =$

$\{P_{2,2,0}^{[\nu,\tilde{l}]}\}$ gilt. Da $e_{\nu,\tilde{l}}$ bzgl. $v_{\nu,\tilde{l}}$ degeneriert ist und ferner für $l = 1, \dots, 6$, $l \neq \tilde{l}$, entweder $P_{2,2,0}^{[\nu,l]} \in \mathcal{A}_{\nu-1}$ gilt oder $S_4^1(\Delta)$ auf $P_{2,2,0}^{[\nu,l]}$ durch die C^1 -Stetigkeitsbedingungen auf $D_2(v_{\nu,l})$ bestimmt ist, folgt

$$\begin{aligned} \lambda_P s &= 0, \quad P \in \mathcal{A}_{\nu-1} \setminus \mathcal{P}_\nu \\ \Rightarrow \quad \lambda_P s &= 0, \quad P \in \mathcal{B}_4(\Delta_{\nu-1}) \setminus \{P_{2,2,0}^{[\nu,\tilde{l}]}, P_{2,1,1}^{[\nu,l]} : l = 2, \dots, 6, l \neq l^*\}. \end{aligned}$$

Aus Lemma 4.11 folgt dann bereits $\lambda_P s = 0$, $P \in D_2(v_\nu)$.

In allen drei Fällen folgt ferner aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen an den Kanten $e_{\nu,0}$ und $e_{\nu,1}$ $\lambda_P s = 0$, $P \in R_1(K_\nu)$. Wegen $P_{0,2,2}^{[\nu,1]} \in \mathcal{A}_\nu$ folgt dann die Behauptung.

Fall 4: $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ ist singulär und es gilt $\lambda_\nu = 0$.

Da v_ν singulär ist, ist $S_4^1(\Delta)$ auf $D_2(v_\nu)$ eindeutig bestimmt. Aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen an den Kanten $e_{\nu,0}$ und $e_{\nu,1}$ und nach Induktionsannahme erhalten wir $\lambda_P s = 0$, $P \in R_1(K_\nu)$. Mit $P_{0,2,2}^{[\nu,1]} \in \mathcal{A}_\nu$ folgt bereits die Behauptung.

Fall 5: v_ν ist ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$.

Sei zunächst $v \in V_B$. Nach Induktionsannahme und aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen an der Kante $[v_{\nu,0}, v_{\nu,1}]$ folgt direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in \{P_{i,j,k}^{[\nu,1]} : i \leq 1, i+j+k = 4\}$. Nach Konstruktion von \mathcal{A}_{K_ν} folgt dann bereits die Behauptung. Sei nun $v \in V_I$. Nach Induktionsannahme erhalten wir $\lambda_P s = 0$, $P \in \{P_{i,j,k}^{[\nu,n_\nu]} : i \leq 1, i+j+k = 4\}$. Nach Konstruktion von \mathcal{A}_{K_ν} folgt aus Theorem 4.8 oder Theorem 4.16, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_4(\Delta_\nu)$ gilt. \square

Somit bleibt zu zeigen, dass \mathcal{A}_n minimal ist. Wir zeigen im Folgenden, dass

$$|\mathcal{A}_\nu| = 15 + 6 |E_I^{(\nu)}| - 12 |V_I^{(\nu)}| + S^{(\nu)}, \quad \nu = 0, \dots, n, \quad (6.6)$$

gilt. Für $\nu = n$ folgt dann aus (6.6) wegen $\Delta_n = \Delta$ aus den Theoremen 2.4 und 2.3, dass \mathcal{A}_n eine minimal bestimmende Menge von $S_4^1(\Delta)$ ist.

Beweis von (6.6) durch vollständige Induktion nach ν .

Induktionsanfang $\nu = 0$. Nach Konstruktion gilt $|\mathcal{A}_0| = 15$. Da ferner für $\Delta^{(0)} = T^{[0]}$ $|V_\nu^{(0)}| = |E_\nu^{(0)}| = S^{(0)} = 0$ gilt, folgt somit die Behauptung.

Induktionsschritt $\nu - 1 \rightarrow \nu$. Die Behauptung (6.6) sei für $\nu - 1$ bereits bewiesen. Wir betrachten zunächst den Fall, dass v_ν ein Randpunkt von $\Delta_{\nu-1}$ ist. Dann gilt offensichtlich $|V_I^{(\nu)}| = |V_I^{(\nu-1)}| + 1$, $|E_I^{(\nu)}| = |E_I^{(\nu-1)}| + \lambda_\nu + 2$ und $S^{(\nu)} = S^{(\nu-1)} + \sigma_{v_\nu}$. Nach Konstruktion erhalten wir somit

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_\nu| &= 15 + 6 |E_I^{(\nu-1)}| - 12 |V_I^{(\nu-1)}| + S^{(\nu-1)} + 6 \lambda_\nu + \sigma_{v_\nu} \\ &= 15 + 6 |E_I^{(\nu)}| - 12 |V_I^{(\nu)}| + S^{(\nu)}. \end{aligned}$$

Ist $v_\nu \in V_I$ ein Flappunkt, dann gilt nach Konstruktion $|V_I^{(\nu)}| = |V_I^{(\nu-1)}| + 1$, $|E_I^{(\nu)}| = |E_I^{(\nu-1)}| + n_\nu + 1$ und $S^{(\nu)} = S^{(\nu-1)} + \sigma_{v_\nu}$. Wir erhalten somit nach Konstruktion

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_\nu| &= 15 + 6|E_I^{(\nu-1)}| - 12|V_I^{(\nu-1)}| + S^{(\nu-1)} + 6n_\nu - 6 + \sigma_{v_\nu} \\ &= 15 + 6|E_I^{(\nu)}| - 12|V_I^{(\nu)}| + S^{(\nu)}. \end{aligned}$$

Ist $v_\nu \in V_B$ ein Flappunkt, dann gilt nach Konstruktion $|V_I^{(\nu)}| = |V_I^{(\nu-1)}|$, $|E_I^{(\nu)}| = |E_I^{(\nu-1)}| + 1$ und $S^{(\nu)} = S^{(\nu-1)}$. Somit gilt

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_\nu| &= 15 + 6|E_I^{(\nu-1)}| - 12|V_I^{(\nu-1)}| + S^{(\nu-1)} + 6 \\ &= 15 + 6|E_I^{(\nu)}| - 12|V_I^{(\nu)}| + S^{(\nu)}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Bemerkung 6.3. Sei Δ eine beliebige Triangulierung, so dass für alle semisingulären Fillpunkte v_ν geraden Grades ≥ 8 eine der folgenden beiden Bedingungen erfüllt ist.

(6.7) Es existiert ein $\tilde{l} \in \{2, \dots, n_\nu - 1\}$, so dass $e_{\nu, \tilde{l}}$ bzgl. $v_{\nu, \tilde{l}}$ degeneriert ist.

(6.8) Für $l = 3, \dots, \frac{n_\nu}{2}$ sind die Winkel $\angle(v_{\nu, 2l-2}, v_{\nu, 2l-1}, v_{\nu, 2l})$ entweder alle größer gleich Null oder alle kleiner gleich Null, wobei mindestens einer der Winkel ungleich Null ist.

Dann folgt mit Lemma 4.15 analog zum Beweis von Theorem 6.2, dass die Menge \mathcal{A}_n wie in (6.1) eine minimal bestimmende Menge von $S_4^1(\Delta)$ ist.

6.1.2 Hermite-Interpolation

Analog zur Vorgehensweise bei der Konstruktion minimal bestimmender Mengen von $S_4^1(\Delta)$ definieren wir im Folgenden induktiv Hermite-Interpolationsmengen für $S_4^1(\Delta)$. Dazu benötigen wir die folgenden Teilmengen von V_I bzw. E .

\mathcal{V}_a sei die Menge aller Eckpunkte v_ν , $l = 1, \dots, n$, so dass v_ν ein semisingulärer Fillpunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ ist und ferner $\deg(v_\nu)$ ungerade ist.

$\mathcal{V}_b \subset V_I$ sei die Vereinigung aller Eckpunkte v_ν , $l = 1, \dots, n$, so dass v_ν mit $\deg(v_\nu) = 6$ ein semisingulärer Fillpunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ ist, und die Kanten $e_{\nu, l}$, $l = 2, \dots, 5$, bzgl. $v_{\nu, l}$ nicht degeneriert sind.

$\mathcal{V}_c \subset V_I$ sei die Vereinigung aller Eckpunkte v_ν , $l = 1, \dots, n$, so dass v_ν mit $\deg(v_\nu) = 6$ ein semisingulärer Fillpunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ ist, und mindestens eine Kante $e_{\nu, l}$, $l \in \{2, \dots, 5\}$, bzgl. $v_{\nu, l}$ degeneriert ist.

Ferner sei $\mathcal{E} \subset E$ die Vereinigung der folgenden Kanten:

- Ist $\nu = 1$ oder ist $v_\nu \in V_I$ ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ und ist ferner v_ν nicht singulär, dann sei $l_\nu \in \{0, \dots, n_\nu - 1\}$ so gegeben, dass e_{ν, l_ν} bzgl. v_ν nicht degeneriert ist, und es gelte $e_{\nu, l_\nu} \in \mathcal{E}$.
- Ist für $\nu \in \{2, \dots, n\}$ $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ ein nicht singulärer Eckpunkt, der bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ nicht semisingulär ist, und gilt $\lambda_\nu \geq 1$, dann sei $e_{\nu, l_\nu}, l_\nu \in \{1, \dots, \lambda_\nu\}$ so gegeben, dass e_{ν, l_ν} bzgl. v_ν nicht degeneriert ist, und es gelte $e_{\nu, l_\nu} \in \mathcal{E}$.
- Ist für $\nu \in \{2, \dots, n\}$ $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ semisingulär bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ und nicht singulär, dann sei $l_\nu \in \{0, \lambda_\nu + 1\}$ so gegeben, dass e_{ν, l_ν} bzgl. v_ν nicht degeneriert ist, und es gelte $e_{\nu, l_\nu} \in \mathcal{E}$.
- Ist für $\nu \in \{2, \dots, n\}$ v_ν ein Fillpunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ und ist mindestens eine der beiden Kanten $e_{\nu, 0}, e_{\nu, 1}$ bzgl. v_ν nicht degeneriert, dann sei $l_\nu \in \{0, 1\}$ so gegeben, dass e_{ν, l_ν} bzgl. v_ν nicht degeneriert ist, und es gelte $e_{\nu, l_\nu} \in \mathcal{E}$.
- Ist für $\nu \in \{2, \dots, n\}$ $v_\nu \in \mathcal{V}_c$, dann sei $l_\nu \in \{2, \dots, 5\}$ so gegeben, dass e_{ν, l_ν} bzgl. v_ν degeneriert ist, und es gelte $e_{\nu, l_\nu} \in \mathcal{E}$.

Sei $s \in S_4^1(\Delta)$ und $p^{[\nu, l]} := s|_{T^{[\nu, l]}}$, $l = 1, \dots, n_\nu$, $n = 1, \dots, n$. Sei $f \in C(\Omega)$ genügend oft differenzierbar. Ferner seien $D^\omega p^{[\nu, l]}$ und $D^\omega f$, $\nu = 1, \dots, n$, $l = 1, \dots, n_\nu$, wie in (2.3) definiert.

Konstruktion von Hermite-Interpolationsmengen:

Gilt $\nu = 1$ oder ist $v_\nu \in V_I$, $\nu > 1$, ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, dann erfülle s die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

$$(6.9) \quad D^\omega p^{[\nu, l]}(v_\nu) = D^\omega f(v_\nu), \quad \omega = 0, 1, \text{ für ein } l \in \{1, \dots, n_\nu\},$$

$$(6.10) \quad \frac{\partial^2 p^{[\nu, l]}}{\partial^2 e_{\nu, l}}(v_\nu) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 e_{\nu, l}}(v_\nu), \text{ falls } e_{\nu, l} \notin \mathcal{E} \text{ gilt, } l = 1, \dots, n_\nu,$$

$$(6.11) \quad \frac{\partial^2 p^{[\nu, l]}}{\partial e_{\nu, l} \partial \tilde{e}_{\nu, l}}(v_\nu) = \frac{\partial^2 f}{\partial e_{\nu, l} \partial \tilde{e}_{\nu, l}}(v_\nu) \text{ für ein } l \in \{1, \dots, n_\nu\},$$

$$(6.12) \quad D^\omega p^{[\nu, l]}(v_{\nu, l}) = D^\omega f(v_{\nu, l}), \quad \omega = 0, 1, \text{ für } l = \begin{cases} 1, \dots, n_1, & \text{falls } \nu = 1, \\ 2, \dots, n_\nu - 1, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$(6.13) \quad \frac{\partial^2 p^{[\nu, l]}}{\partial^2 \tilde{e}_{\nu, l}}(v_{\nu, l}) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 \tilde{e}_{\nu, l}}(v_{\nu, l}), \text{ falls } \tilde{e}_{\nu, l} \notin \mathcal{E} \text{ gilt, für } l = \begin{cases} 1, \dots, n_1, & \text{falls } \nu = 1, \\ 1, \dots, n_\nu - 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$(6.14) \quad \frac{\partial^2 p^{[\nu, l]}}{\partial e_{\nu, l} \partial \tilde{e}_{\nu, l}}(v_{\nu, l}) = \frac{\partial^2 f}{\partial e_{\nu, l} \partial \tilde{e}_{\nu, l}}(v_{\nu, l}), \text{ falls } v_{\nu, l} \notin \mathcal{V}_a, \text{ für } l = \begin{cases} 1, \dots, n_1, & \text{falls } \nu = 1, \\ 2, \dots, n_\nu - 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Gilt $\nu > 1$ und ist $v_\nu \in V_B$ ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, dann erfülle s die folgenden Hermite-Interpolationsbedingung:

$$(6.15) \quad D^\omega p^{[\nu,1]}(v_\nu) = D^\omega f(v_\nu), \quad \omega = 0, 1, 2.$$

Sei nun $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$, $2 \leq \nu \leq n$. Dann betrachten wir die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

$$(6.16) \quad \frac{\partial^2 p^{[\nu,l]}}{\partial^2 e_{\nu,l}}(v_\nu) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 e_{\nu,l}}(v_\nu) \quad \text{für } l = \begin{cases} 1, \dots, \lambda_\nu, & \text{falls } v_\nu \text{ singulär ist,} \\ 1, \dots, \lambda_\nu, l \neq l_\nu, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$(6.17) \quad D^\omega p^{[\nu,l]}(v_{\nu,l}) = D^\omega f(v_{\nu,l}), \quad \omega = 0, 1, \text{ falls } v_{\nu,l} \notin \mathcal{V}_b, \quad l = 1, \dots, \lambda_\nu,$$

$$(6.18) \quad \frac{\partial^2 p^{[\nu,l]}}{\partial e_{\nu,l} \partial \tilde{e}_{\nu,l}}(v_{\nu,l}) = \frac{\partial^2 f}{\partial e_{\nu,l} \partial \tilde{e}_{\nu,l}}(v_{\nu,l}), \text{ falls } v_{\nu,l} \notin \mathcal{V}_a \cup \mathcal{V}_b, \quad l = 1, \dots, \lambda_\nu,$$

$$(6.19) \quad \frac{\partial^2 p^{[\nu,l]}}{\partial^2 \tilde{e}_{\nu,l}}(v_{\nu,l}) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 \tilde{e}_{\nu,l}}(v_{\nu,l}), \text{ falls } \tilde{e}_{\nu,l} \notin \mathcal{E}, \quad l = 1, \dots, \lambda_\nu + 1,$$

$$(6.20) \quad p^{[\nu,l]}(v_\nu) = f(v_\nu), \quad \frac{\partial p^{[\nu,2]}}{\partial e_{\nu,2}}(v_\nu) = \frac{\partial f}{\partial e_{\nu,2}}(v_\nu), \quad \frac{\partial^2 p^{[\nu,2]}}{\partial e_{\nu,2} \partial e_{\nu,1}}(v_\nu) = \frac{\partial^2 f}{\partial e_{\nu,2} \partial e_{\nu,1}}(v_\nu).$$

Für $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$, $\nu \geq 2$, erfülle s Interpolationsbedingungen auf K_ν wie folgt: Gilt $\lambda_\nu \geq 1$, dann erfülle s die Interpolationsbedingungen (6.16) bis (6.19). Gilt $v_\nu \in \mathcal{V}_e$, dann erfülle s die Bedingungen (6.19) und (6.20). Gilt $\lambda_\nu = 0$ und $v_\nu \notin \mathcal{V}_e$, dann erfülle s die Bedingung (6.19).

Theorem 6.4. *Sei Δ eine beliebige Triangulierung vom Grad ≤ 7 . Dann ist V eine Hermite-Interpolationsmenge für $S_4^1(\Delta)$.*

Beweis. Analog zum Beweis von Theorem 6.2 folgt induktiv mit den Beziehungen (2.7) zwischen den partiellen Ableitungen und den Bézier-Koeffizienten von s , dass die Hermite-Interpolationsbedingungen die Bézier-Koeffizienten einer wie in (6.1) gegebenen minimal bestimmenden Menge \mathcal{A}_n von $S_4^1(\Delta)$ eindeutig bestimmen. ■

Sei Δ nun eine beliebige Triangulierung mit den Eckpunkten v_1, \dots, v_n aus $V_I \cup \tilde{V}_B$ indiziert nach Algorithmus 2, so dass für alle semisingulären Fillpunkte v_ν geraden Grades mit $\deg(v_\nu) \geq 8$ die Bedingung (6.7) oder (6.8) aus Bemerkung 6.3 erfüllt ist. Definieren wir \mathcal{V}_c als die Menge aller semisingulären Fillpunkte v_ν geraden Grades, die nicht singulär sind und die entweder die Bedingung (6.7) oder die Bedingung (6.8) erfüllen, erhalten wir mit Bemerkung 6.3 und den Relationen (2.7) das folgende Korollar.

Korollar 6.5. *Sei Δ eine beliebige Triangulierung, so dass für alle semisingulären Fillpunkte v_ν geraden Grades mit $\deg(v_\nu) \geq 8$ die Bedingung (6.7) oder (6.8) erfüllt ist. Dann ist V eine Hermite-Interpolationsmenge von $S_4^1(\Delta)$.*

6.2 Triangulierungen mit semisingulären Fillpunkten

Im Folgenden sei Δ eine beliebige Triangulierung. Wir durchlaufen Δ nach Algorithmus 2 aus Abschnitt 3.1 und erhalten eine Indizierung v_ν , $\nu = 1, \dots, n$, der Eckpunkte aus $V_I \cup \tilde{V}_B$ sowie eine Kette $\Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \dots \subset \Delta_n = \Delta$ von Teiltriangulierungen von Δ . Für $\nu = 0, \dots, n$ erfülle v_ν die folgende Bedingung:

(6.21) Ist v_ν ein nicht singulärer Eckpunkt geraden Grades und ist v_ν semisingulär bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, dann existiere mindestens ein $l_\nu^* \in \{2, \dots, n_\nu - 1\}$, so dass entweder v_{ν, l_ν^*} singulär oder $\deg(v_{\nu, l_\nu^*})$ ungerade ist.

Wir konstruieren im Folgenden eine allgemeine Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_4^1(\Delta)$. Unter Verwendung der Relationen (2.7) und (2.8) erhalten wir daraus allgemeine Hermite-Interpolationsschemas für $S_4^1(\Delta)$, wobei für alle Eckpunkte der Funktionswert und die partiellen Ableitungen ersten Grades interpoliert werden.

6.2.1 Minimal bestimmende Mengen

Im Folgenden konstruieren wir induktiv eine große Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_4^1(\Delta)$. Ist der aktuelle Eckpunkt $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ ein Eckpunkt ungeraden Grades, dann entfernen wir aus der Menge $\mathcal{A}_{\nu-1}$ der bereits für die minimal bestimmende Menge gewählten BB-Punkte einen geeigneten Punkt, so dass für alle inneren Kanten des Kegels K_ν die Mittelpunkte der Kante zur minimal bestimmenden Menge hinzugefügt werden können. D. h. wir ändern $\mathcal{A}_{\nu-1}$ lokal auf $R_2(v_\nu)$ ab. Wir erreichen somit, dass im Fall eines semisingulären Fillpunkts v_μ geraden Grades, das Problem aufgelöst werden kann, dass $S_4^1(\Delta)$ beim Hinzufügen des Fills überbestimmt ist, indem wir den Mittelpunkt einer der Kanten $e_{\mu, l}$, $l \in \{2, \dots, n_\mu - 1\}$, aus $\mathcal{A}_{\mu-1}$ entfernen.

Konstruktion minimal bestimmender Mengen:

Wir definieren $\mathcal{A}_\nu \subset \mathcal{B}_4(\Delta_\nu)$, $\nu = 0, \dots, n$, induktiv wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &:= \mathcal{B}_4(T^{[0]}), \\ \mathcal{A}_\nu &:= (\mathcal{A}_{\nu-1} \setminus \mathcal{P}_\nu) \cup \mathcal{A}_{K_\nu}, \quad \nu = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Für die Definition der Mengen \mathcal{A}_{K_ν} benötigen wir die Bedingung (6.23).

(6.23) \mathcal{A}_{K_ν} enthält drei nicht kollineare BB-Punkte aus $D_1(v_{\nu, l}) \cap \mathcal{B}_4(K_\nu)$ und einen BB-Punkt aus $\{P_{1,2,1}^{[\nu, l]}, P_{1,1,2}^{[\nu, l+1]}\}$ für $l = 1, \dots, \lambda_\nu$, falls $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ gilt, bzw. für $l = 2, \dots, n_\nu - 1$, falls $v_\nu \in V_I$ ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ ist.

Für $\nu = 1, \dots, n$ seien die Mengen \mathcal{A}_{K_ν} und \mathcal{P}_ν wie folgt definiert.

Fall 1: Es gilt $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ und $n_\nu = \deg(v_\nu)$ ist ungerade.

\mathcal{A}_{K_ν} erfülle die Bedingung (6.23). Ferner gelte $\{P_{2,2,0}^{[\nu,l]} : l = 1, \dots, \lambda_\nu\} \subset \mathcal{A}_{K_\nu}$ sowie $\{P_{0,2,2}^{[\nu,l]} : l = 1, \dots, \lambda_\nu + 1\} \subset \mathcal{A}_{K_\nu}$. Des Weiteren sei $\mathcal{P}_\nu = \{P_{2,1,1}^{[\nu,l]} : l = 1, \dots, n_\nu\}$.

Fall 2: Es gilt $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ und $n_\nu = \deg(v_\nu)$ ist gerade.

a) Es gilt $\lambda_\nu \geq 1$.

Dann sei die Menge \mathcal{A}_{K_ν} wie in (4.36) gegeben, falls v_ν nicht semisingulär bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ ist, und anderenfalls sei die Menge \mathcal{A}_{K_ν} wie in (4.37) gegeben. Ferner erfülle \mathcal{A}_{K_ν} die Bedingung (6.23). Ist v_ν singulär oder ist v_ν bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ nicht semisingulär, gelte $\mathcal{P}_\nu = \emptyset$. Ist v_ν nicht singulär und semisingulär bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, gelte $\mathcal{P}_\nu = \{P_\nu\}$ mit

$$P_\nu \in \begin{cases} \{P_{2,0,2}^{[\nu,1]}\}, & \text{falls } e_{\nu,\lambda_\nu+1} \text{ bzgl. } v_\nu \text{ degeneriert ist,} \\ \{P_{2,2,0}^{[\nu,\lambda_\nu+1]}\}, & \text{falls } e_{\nu,0} \text{ bzgl. } v_\nu \text{ degeneriert ist,} \\ \{P_{2,0,2}^{[\nu,1]}, P_{2,2,0}^{[\nu,\lambda_\nu+1]}\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (6.24)$$

b) Es gilt $\lambda_\nu = 0$ und mindestens eine der beiden Kanten $e_{\nu,0}$, $e_{\nu,1}$ ist bzgl. v_ν nicht degeneriert.

Dann sei $\mathcal{A}_{K_\nu} = \{P_{0,2,2}^{[\nu,1]}\}$ und $\mathcal{P}_\nu = \{P_\nu\}$, wobei P_ν wie in (6.24) gegeben ist.

c) Es gilt $\lambda_\nu = 0$. v_ν ist nicht singulär und sowohl $e_{\nu,0}$ als auch $e_{\nu,1}$ sind bzgl. v_ν degeneriert.

Sei $l_\nu^* \in \{2, \dots, n_\nu - 1\}$ so gegeben, dass $\deg(v_{\nu,l_\nu^*})$ ungerade oder v_{ν,l_ν^*} singulär ist. Dann sei $\mathcal{A}_{K_\nu} = \{P_{0,2,2}^{[\nu,1]}\}$ und $\mathcal{P}_\nu = \{P_{2,2,0}^{[\nu,l_\nu^*]}\}$.

d) Es gilt $\lambda_\nu = 0$ und v_ν ist ein singulärer Eckpunkt von Δ .

Dann sei $\mathcal{A}_{K_\nu} = \{P_{0,2,2}^{[\nu,1]}\}$ und $\mathcal{P}_\nu = \emptyset$.

Fall 3: v_ν ist ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$.

a) Gilt $v \in V_B$, dann sei $\mathcal{A}_{K_\nu} = \{P_{i,j,k}^{[\nu,1]} : i > 1, j + k = 4 - i\}$. Ferner sei $\mathcal{P}_\nu = \emptyset$.

b) Ist $v_\nu \in V_I$, dann sei $\mathcal{A}_{\Delta_{v_\nu}}$ wie in Theorem 4.8, 4.9, 4.10 oder 4.16 eine minimal bestimmende Menge von $S_4^1(\Delta)$ auf $\mathcal{B}_4(\Delta_{v_\nu})$. Ferner gelte $\{P_{i,j,k}^{[\nu,n_\nu]} : i \leq 1, i + j + k = 4\} \subset \mathcal{A}_{\Delta_{v_\nu}}$ und $\mathcal{A}_{\Delta_{v_\nu}}$ erfülle die Bedingung (6.23). Dann gelte $\mathcal{A}_{K_\nu} = \mathcal{A}_{\Delta_{v_\nu}} \setminus \{P_{i,j,k}^{[\nu,n_\nu]} : i \leq 1, i + j + k = 4\}$ und $\mathcal{P}_\nu = \emptyset$.

Bemerkung 6.6. Sei v_ν singulär oder sei $\deg(v_\nu)$ ungerade, $\nu \in \{1, \dots, n\}$. Ferner gelte $P_{2,2,0}^{[\nu,l]} \notin \mathcal{A}_n$ für ein $l \in \{1, \dots, \lambda_\nu\}$. Dann gilt nach Konstruktion, dass $v_{\nu,l}$ ein nicht singulärer Eckpunkt geraden Grades ist und ferner einer der beiden folgenden Fälle vorliegt:

- (i) Es existiert ein $\mu < \nu$, so dass $v_\mu = v_{\nu,l}$ gilt und $e_{\nu,l}$ bzgl. v_μ nicht degeneriert ist.
- (ii) Es existiert ein $\mu > \nu$, so dass $v_\mu = v_{\nu,l}$ gilt und v_μ entweder bzgl. $\Delta_{\mu-1}$ semisingulär ist oder $\lambda_\mu = 0$ gilt. Insbesondere gilt in diesem Fall $P_{2,2,0}^{[\nu,l]} \in \mathcal{A}_{\mu-1}$.

Theorem 6.7. Sei Δ eine beliebige Triangulierung, so dass (6.21) für $\nu = 1, \dots, n$ erfüllt ist. Dann ist \mathcal{A}_n wie in (6.22) eine minimal bestimmende Menge von $S_4^1(\Delta)$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass \mathcal{A}_n eine bestimmende Menge von $S_4^1(\Delta)$ ist. Sei $s \in S_4^1(\Delta)$, und es gelte $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{A}_n$. Im Folgenden zeigen wir

$$\lambda_P s = 0, \quad P \in \mathcal{A}_\nu \quad \Rightarrow \quad \lambda_P s = 0, \quad P \in \mathcal{B}_4(\Delta_\nu), \quad \nu = 0, \dots, n. \quad (6.25)$$

Da $\Delta_n = \Delta$ gilt, folgt aus (6.25), dass \mathcal{A}_n eine bestimmende Menge von $S_4^1(\Delta)$ ist.

Beweis von (6.25) durch vollständige Induktion nach ν .

Induktionsanfang $\nu = 0$. Nach Konstruktion gilt $\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}_4(T^{[0]})$ und somit $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_4(\Delta_0)$.

Induktionsschritt $\nu - 1 \rightarrow \nu$. Die Behauptung (6.25) sei für $\nu - 1$ bereits bewiesen. Die Menge $R_1(K_\nu)$ sei wie in (4.2) gegeben, falls v_ν bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ nicht semisingulär vom Typ II ist. Anderenfalls sei $R_1(K_\nu)$ wie in (4.3) gegeben.

Fall 1: Es gilt $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ und $\deg(v_\nu)$ ist ungerade.

Dann existiert nach Konstruktion ein $\mu < \nu$, so dass $\Delta_\mu = \Delta_{\mu-1} \cup K_\mu$ gilt und ferner v_ν ein Randpunkt von K_μ ist. Offensichtlich ist dann v_μ auch ein Randpunkt von $\Delta_{\nu-1}$, und für ein $l^* \in \{\lambda_\nu + 2, \dots, n_\nu - 1\}$ gilt somit $v_{\nu,l^*} = v_\mu$. Ist $\deg(v_\mu)$ ungerade, dann folgt nach Konstruktion direkt $P_{2,2,0}^{[\nu,l^*]} \in \mathcal{A}_{\nu-1}$. Ist $\deg(v_\mu)$ gerade, dann erfüllt \mathcal{A}_{K_μ} die Bedingung (6.23). Entweder folgt dann wegen der C^1 -Stetigkeitsbedingungen an der Kante e_{ν,l^*} $P_{2,2,0}^{[\nu,l^*]} \in \mathcal{A}_{\nu-1}$ oder $S_4^1(\Delta_{\nu-1})$ ist durch die C^1 -Stetigkeitsbedingungen auf $D_2(v_{\nu,l^*})$ auch auf $P_{2,2,0}^{[\nu,l^*]}$ bestimmt. Betrachten wir die restlichen Randpunkte der Zelle $\Delta_{\nu-1}$, dann gibt es ferner Indizes μ_l , $l = \lambda_\nu + 2, \dots, n_\nu - 1$, $l \neq l^*$, mit $\mu < \mu_l \leq \nu - 1$, so dass $v_{\mu_l} = v_{\nu,l}$ gilt. Nach Konstruktion der Teiltriangulierungen Δ_m , $m = \mu, \dots, \nu - 1$, wird nur dann die Zelle eines Flappunkts zu Δ_m hinzugefügt, wenn keiner der Randpunkte von Δ_m ein innerer Eckpunkt von Δ ist. Da v_ν jedoch ein Randpunkt von Δ_μ und somit auch von Δ_m , $m = \mu + 1, \dots, \nu - 1$, ist und ferner $v_\nu \in V_I$ gilt, folgt, dass die Eckpunkte v_{μ_l} , $\mu = 2, \dots, n_\nu - 1$, $l \neq l^*$, Randpunkte von Δ_{μ_l} sind. Wegen $v_{\mu_l} = v_{\nu,l}$ folgt dann nach Konstruktion der Mengen $\mathcal{A}_{K_{\mu_l}}$, dass entweder $P_{2,2,0}^{[\nu,l]} \in \mathcal{A}_{\nu-1}$ gilt oder $S_4^1(\Delta)$ auf $P_{2,2,0}^{[\nu,l]}$ durch die C^1 -Stetigkeitsbedingungen auf $D_2(v_{\mu_l})$ bestimmt ist. Nach Konstruktion gilt ferner $\{P_{2,2,0}^{[\nu,\lambda_\nu+1]}, P_{2,2,0}^{[\nu,n_\nu]}\} \subset \mathcal{A}_{\mu-1}$. Somit folgt für alle $l = \lambda_{\nu+1}, \dots, n_\nu$ entweder $P_{2,2,0}^{[\nu,l]} \in \mathcal{A}_{\nu-1}$ oder $S_4^1(\Delta_{\nu-1})$ ist auf $P_{2,2,0}^{[\nu,l]}$ durch die C^1 -Stetigkeitsbedingungen auf $D_2(v_{\nu,l})$ bestimmt.

Da $\mathcal{A}_{\nu-1}$ nach Konstruktion drei nicht kollineare BB-Punkte aus $D_1(v_\nu)$ enthält, und ferner $\mathcal{P}_\nu \subset \{P_{2,1,1}^{[\nu,l^*]}, P_{2,1,1}^{[\nu,l^*+1]}\}$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda_P s &= 0, \quad P \in \mathcal{A}_{\nu-1} \setminus \mathcal{P}_\nu \\ \Rightarrow \lambda_P s &= 0, \quad P \in \mathcal{B}_4(\Delta_{\nu-1}) \setminus \{P_{2,1,1}^{[\nu,l]} : l = \lambda_\nu + 2, \dots, n_\nu\}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Nach Konstruktion gilt $(\mathcal{A}_{\nu-1} \setminus \mathcal{P}_\nu) \subset \mathcal{A}_\nu$ und $\{P_{2,2,0}^{[\nu,l]} : 1 \leq l \leq \lambda_\nu\} \subset \mathcal{A}_\nu$. Aus Lemma 4.12 folgt dann mit (6.26), dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in D_2(v_\nu)$ gilt. Nach Definition von \mathcal{A}_{K_ν} und aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen an $e_{\nu,1}, \dots, e_{\nu,\lambda_\nu}$ folgt dann bereits (6.25).

Fall 2: Es gilt $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ und $\deg(v_\nu)$ ist gerade.

a) Es gilt $\lambda_\nu \geq 1$.

Ist v_ν singulär oder ist v_ν ein nicht singulärer Eckpunkt, der bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ nicht semisingulär ist, folgt nach Induktionsannahme aus Theorem 4.6 bereits $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_4(\Delta_\nu)$. Ist v_ν hingegen ein nicht singulärer Eckpunkt, der bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ semisingulär ist, dann ist mindestens eine der beiden Kanten $e_{\nu,0}$ und $e_{\nu,\lambda_\nu+1}$ bzgl. v_ν nicht degeneriert. O.B.d.A. sei $e_{\nu,0}$ bzgl. v_ν nicht degeneriert, und es gelte $P_\nu = P_{2,0,2}^{[\nu,1]}$. Aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen folgt nach Induktionsannahme zunächst, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in R_1(K_\nu) \setminus \{P_{2,0,2}^{[\nu,1]}, P_{1,1,2}^{[\nu,1]}\}$ gilt. Aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen an den Kanten $e_{\nu,0}$ und $e_{\nu,\lambda_\nu+1}$ erhalten wir $\lambda_P s = 0, P \in R_1(K_\nu)$. Dann folgt mit $\mathcal{A}_{K_\nu} \subset \mathcal{A}_\nu$ bereits (6.25). Für $P_\nu = P_{2,2,0}^{[\nu,\lambda_\nu]}$ folgt die Behauptung analog.

b) Es gilt $\lambda_\nu = 0$ und mindestens eine der beiden Kanten $e_{\nu,0}, e_{\nu,1}$ ist bzgl. v_ν nicht degeneriert.

Analog zum Beweis von Fall 2a) folgt $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in R_1(K_\nu)$. Mit $P_{0,2,2}^{[\nu,1]} \in \mathcal{A}_\nu$ folgt dann bereits die Behauptung.

c) Es gilt $\lambda_\nu = 0$, v_ν ist nicht singulär und sowohl $e_{\nu,0}$ als auch $e_{\nu,1}$ sind bzgl. v_ν degeneriert.

Nach Konstruktion ist v_ν ein Randpunkt von $\Delta_{\nu-1}$. Ferner gilt nach Voraussetzung für ein $l_\nu^* \in \{2, \dots, n_\nu - 1\}$, dass v_{ν,l_ν^*} singulär oder $\deg(v_{\nu,l_\nu^*})$ ungerade ist. Sei $P_\nu = P_{2,2,0}^{[\nu,l_\nu^*]}$. Da v_{ν,l_ν^*} ein innerer Eckpunkt von $\Delta_{\nu-1}$ ist, gibt es ein $\mu < \nu$ mit $v_\mu = v_{\nu,l_\nu^*}$. Nach Konstruktion von \mathcal{A}_μ und wegen Bemerkung 6.6 gilt $P_\nu \in \mathcal{A}_{\nu-1}$.

Offensichtlich gilt $P_\nu \in D_2(v_\mu) \cap D_2(v_\nu)$. Wir werden zeigen, dass das nachträgliche Entfernen von P_ν aus $\mathcal{A}_{\nu-1}$ nur lokale Auswirkungen hat, und $S_4^1(\Delta_{\nu-1})$ dadurch nur auf BB-Punkten aus $D_2(v_\mu) \cup D_2(v_\nu) \cup \{P_{2,1,1}^{[\nu,l_\nu^*]}, P_{2,1,1}^{[\nu,l_\nu^*+1]}\}$ nicht mehr bestimmt ist. Wir betrachten zunächst $D_2(v_\mu)$. Nach Konstruktion enthält $\mathcal{A}_{\nu-1}$ genau drei nicht kollineare BB-Punkte aus $D_1(v_\mu)$. Ist v_μ singulär, dann folgt nach Konstruktion aus $\lambda_P s = 0, P \in \mathcal{A}_{\nu-1} \setminus \{P_\nu\}$, direkt $\lambda_P s = 0, P \in \mathcal{B}_4(\Delta_{\nu-1}) \setminus R_2(v_\nu)$, da e_{ν,l_ν^*} bzgl. $v_{\nu,l_\nu^*} = v_\mu$ degeneriert ist. Ist hingegen $\deg(v_\mu)$ ungerade, dann folgt analog zum Beweis von Fall 1, dass für $l = 1, \dots, n_\mu$ entweder $P_{2,2,0}^{[\mu,l]} \in \mathcal{A}_{\nu-1}$ gilt oder $S_4^1(\Delta_{\nu-1})$ auf $P_{2,2,0}^{[\mu,l]}$ durch die C^1 -Stetigkeitsbedingungen

auf $D_2(v_{\mu,l})$ bestimmt ist. Wegen $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}_{\nu-1} \setminus \{P_\nu\}$, folgt somit insbesondere $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_4(\Delta_{\nu-1}) \setminus (R_2(v_\nu) \cup \{P_{2,1,l}^{[\mu,l]} : l = 1, \dots, n_\mu\})$. D. h. das Entfernen von $P_{2,2,0}^{[\nu,l_\nu^*]}$ aus $\mathcal{A}_{\nu-1}$ hat nur lokal eine Auswirkung.

Für v_ν lässt sich ebenfalls analog zum Beweis von Fall 1 zeigen, dass die BB-Punkte $P_{2,2,0}^{[\nu,l]}$, $l = 1, \dots, n_\nu$, $l \neq l_\nu^*$, entweder in $\mathcal{A}_{\nu-1}$ liegen oder $S_4^1(\Delta_{\nu-1})$ auf diesen durch die C^1 -Stetigkeitsbedingungen auf $D_2(v_{\nu,l})$ bestimmt ist. Ferner enthält $\mathcal{A}_{\nu-1}$ nach Konstruktion drei nicht kollineare BB-Punkte aus $D_1(v_\nu)$ und einen BB-Punkt aus $\{P_{2,1,l}^{[\nu,l]} : l = 2, \dots, n_\nu\}$. Aus Lemma 4.11 erhalten wir dann bereits $\lambda_P s = 0$, $P \in D_2(v_\nu)$. Insbesondere gilt dann $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{A}_{\nu-1}$, so dass nach Induktionsannahme $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_4(\Delta_{\nu-1})$, folgt. Aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen an den Kanten $e_{\nu,0}$ und $e_{\nu,1}$ sowie wegen $P_{0,2,2}^{[\nu,1]} \in \mathcal{A}_\nu$ folgt dann (6.25).

d) Es gilt $\lambda_\nu = 0$ und v_ν ist ein singulärer Eckpunkt von Δ .

Nach Induktionsannahme und aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen an den Kanten $e_{\nu,0}$ und $e_{\nu,1}$ erhalten wir $\lambda_P s = 0$, $P \in R_1(K_\nu)$. Mit $P_{0,2,2}^{[\nu,1]} \in \mathcal{A}_\nu$ folgt dann die Behauptung.

Fall 3: v_ν ist ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$.

Nach Induktionsannahme und aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen an der Kante $[v_{\nu,0}, v_{\nu,1}]$ folgt direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in \{P_{i,j,k}^{[\nu,1]} : i \leq 1, j+k = 4-i\}$. Nach Konstruktion von \mathcal{A}_{K_ν} folgt dann die Behauptung (6.25). \square

Es bleibt zu zeigen, dass \mathcal{A}_n minimal ist. Wir zeigen im Folgenden, dass

$$|\mathcal{A}_\nu| = 15 + 6|E_I^{(\nu)}| - 12|V_I^{(\nu)}| + S^{(\nu)}, \quad \nu = 0, \dots, n, \quad (6.27)$$

gilt. Für $\nu = n$ folgt dann aus (6.27) wegen $\Delta_n = \Delta$ aus den Theoremen 2.4 und 2.3, dass \mathcal{A}_n eine minimal bestimmende Menge von $S_4^1(\Delta)$ ist.

Beweis von (6.27) durch vollständige Induktion nach ν .

Induktionsanfang $\nu = 0$. Nach Konstruktion gilt $|\mathcal{A}_0| = 15$. Da ferner für $\Delta^{(0)} = T^{[0]}$ $|V_\nu^{(0)}| = |E_\nu^{(0)}| = S^{(0)} = 0$ gilt, folgt daraus die Behauptung.

Induktionsschritt $\nu - 1 \rightarrow \nu$. Die Behauptung (6.27) sei für $\nu - 1$ bereits bewiesen. Wir betrachten zunächst den Fall, dass v_ν ein Randpunkt von $\Delta_{\nu-1}$ ist. Dann gilt offensichtlich $|V_I^{(\nu)}| = |V_I^{(\nu-1)}| + 1$, $|E_I^{(\nu)}| = |E_I^{(\nu-1)}| + \lambda_\nu + 2$ und $S^{(\nu)} = S^{(\nu-1)} + \sigma_{v_\nu}$. Nach Konstruktion erhalten wir somit

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_\nu| &= 15 + 6|E_I^{(\nu-1)}| - 12|V_I^{(\nu-1)}| + S^{(\nu-1)} + 6\lambda_\nu + \sigma_{v_\nu} \\ &= 15 + 6|E_I^{(\nu)}| - 12|V_I^{(\nu)}| + S^{(\nu)}. \end{aligned}$$

Ist v_ν ein Flappunkt, dann gilt nach Konstruktion $|V_I^{(\nu)}| = |V_I^{(\nu-1)}| + 1$, $|E_I^{(\nu)}| = |E_I^{(\nu-1)}| +$

$n_\nu + 1$ und $S^{(\nu)} = S^{(\nu-1)} + \sigma_{v_\nu}$. Wir erhalten somit nach Konstruktion

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_\nu| &= 15 + 6|E_I^{(\nu-1)}| - 12|V_I^{(\nu-1)}| + S^{(\nu-1)} + 6n_\nu - 6 + \sigma_{v_\nu} \\ &= 15 + 6|E_I^{(\nu)}| - 12|V_I^{(\nu)}| + S^{(\nu)}. \end{aligned}$$

Ist $v_\nu \in V_B$ ein Flappunkt, dann gilt nach Konstruktion $|V_I^{(\nu)}| = |V_I^{(\nu-1)}|$, $|E_I^{(\nu)}| = |E_I^{(\nu-1)}| + 1$ und $S^{(\nu)} = S^{(\nu-1)}$. Wir erhalten dann nach Konstruktion

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_\nu| &= 15 + 6|E_I^{(\nu-1)}| - 12|V_I^{(\nu-1)}| + S^{(\nu-1)} + 6 \\ &= 15 + 6|E_I^{(\nu)}| - 12|V_I^{(\nu)}| + S^{(\nu)}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Bemerkung 6.8. Nach Konstruktion enthält \mathcal{A} für alle $v \in V$ genau drei nicht kollineare BB-Punkte aus $D_1(v)$. Durch die Bedingung (6.23) ist die Wahl dieser drei BB-Punkte eingeschränkt. Wählen wir stattdessen für jeden Eckpunkt $v \in V$ drei beliebige nicht kollineare BB-Punkte aus $D_2(v)$, erhalten wir offensichtlich eine größere Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_4^1(\Delta)$.

6.2.2 Hermite-Interpolation

Es sei Δ eine beliebige Triangulierung mit einer Zerlegung $\Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \dots \subset \Delta_n = \Delta$ nach Algorithmus 2 so gegeben, dass für $\nu = 1, \dots, n$ die Bedingung (6.21) erfüllt ist. Im Folgenden konstruieren wir für Δ eine Klasse von Hermite-Interpolationsbedingungen. Dazu benötigen wir die folgenden Teilmengen von V_I bzw. E . Es sei $\mathcal{V} \subset V_I$ die Menge aller inneren Eckpunkte ungeraden Grades von Δ . $\mathcal{E} \subset E$ sei die Vereinigung der folgenden Kanten:

- Ist $\deg(v_1)$ gerade, dann sei $l_1 \in \{0, \dots, n_1 - 1\}$ so gegeben, dass e_{1,l_1} bzgl. v_1 nicht degeneriert ist, und es gelte $e_{1,l_1} \in \mathcal{E}$.
- Ist $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$, $2 \leq \nu \leq n$, ein nicht singulärer Eckpunkt geraden Grades, der bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ nicht semisingulär ist und gilt $\lambda_\nu \geq 1$, dann sei e_{ν,l_ν} , $l_\nu \in \{1, \dots, \lambda_\nu\}$ so gegeben, dass e_{ν,l_ν} bzgl. v_ν nicht degeneriert ist, und es gelte $e_{\nu,l_\nu} \in \mathcal{E}$.
- Ist $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$, $2 \leq \nu \leq n$, ein nicht singulärer Eckpunkt geraden Grades, der bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ semisingulär ist, dann sei $e_\nu \in \{e_{\nu,0}, e_{\nu,\lambda_\nu+1}\}$ bzgl. v_ν nicht degeneriert, und es gelte $e_\nu \in \mathcal{E}$.
- Sei $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$, $2 \leq \nu \leq n$, ein nicht singulärer Eckpunkt geraden Grades. Gilt $\lambda_\nu = 0$ und ist mindestens eine der beiden Kanten $e_{\nu,0}$, $e_{\nu,1}$ bzgl. v_ν nicht degeneriert, dann sei $e_\nu \in \{e_{\nu,0}, e_{\nu,1}\}$ bzgl. v_ν nicht degeneriert, und es gelte $e_\nu \in \mathcal{E}$. Sind hingegen beide Kanten $e_{\nu,0}$, $e_{\nu,1}$ bzgl. v_ν degeneriert, dann sei $l_\nu^* \in \{2, \dots, n_\nu - 1\}$ wie in Bedingung (6.21) gegeben, und es gelte $e_{\nu,l_\nu^*} \in \mathcal{E}$.

- Ist $v_\nu \in V_I$, $\nu \geq 2$, ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, der nicht singulär und geraden Grades ist, dann sei e_{ν,l_ν} , $l_\nu \in \{0, \dots, n_\nu - 1\}$ so gegeben, dass e_{ν,l_ν} bzgl. v_ν nicht degeneriert ist, und es gelte $e_{\nu,l_\nu} \in \mathcal{E}$, $\nu = 1, \dots, n$.

Sei $s \in S_4^1(\Delta)$ und $p^{[\nu,l]} := s|_{T^{[\nu,l]}}$, $l = 1, \dots, n_\nu$, $n = 1, \dots, n$. Sei $f \in C(\Omega)$ genügend oft differenzierbar. Ferner seien $D^\omega p^{[\nu,l]}$ und $D^\omega f$, $\nu = 1, \dots, n$, $l = 1, \dots, n_\nu$, $\omega \in \mathbb{N}$, wie in (2.3) definiert.

Konstruktion von Hermite-Interpolationsmengen:

Ist $\nu = 1$ oder ist $v_\nu \in V_I$, $2 \leq \nu \leq n$, ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, dann erfülle s die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

$$(6.28) \quad D^\omega p^{[\nu,l]}(v_\nu) = D^\omega f(v_\nu), \quad \omega = 0, 1, \text{ für ein } l \in \{1, \dots, n_\nu\},$$

$$(6.29) \quad \frac{\partial^2 p^{[\nu,l]}}{\partial^2 e_{\nu,l}}(v_\nu) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 e_{\nu,l}}(v_\nu), \text{ falls } e_{\nu,l} \notin \mathcal{E} \text{ gilt, } l = 1, \dots, n_\nu,$$

$$(6.30) \quad \frac{\partial^2 p^{[\nu,l]}}{\partial e_{\nu,l} \partial \tilde{e}_{\nu,l}}(v_\nu) = \frac{\partial^2 f}{\partial e_{\nu,l} \partial \tilde{e}_{\nu,l}}(v_\nu) \text{ für ein } l \in \{1, \dots, n_\nu\}, \text{ falls } v_\nu \notin \mathcal{V} \text{ gilt,}$$

$$(6.31) \quad D^\omega p^{[\nu,l]}(v_{\nu,l}) = D^\omega f(v_{\nu,l}), \quad \omega = 0, 1, \text{ für } l = \begin{cases} 1, \dots, n_1, & \text{falls } \nu = 1, \\ 2, \dots, n_\nu - 1, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$(6.32) \quad \frac{\partial^2 p^{[\nu,l]}}{\partial^2 \tilde{e}_{\nu,l}}(v_{\nu,l}) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 \tilde{e}_{\nu,l}}(v_{\nu,l}), \text{ falls } \tilde{e}_{\nu,l} \notin \mathcal{E}, \text{ für } l = \begin{cases} 1, \dots, n_1, & \text{falls } \nu = 1, \\ 1, \dots, n_\nu - 1, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$(6.33) \quad \frac{\partial^2 p^{[\nu,l]}}{\partial e_{\nu,l} \partial \tilde{e}_{\nu,l}}(v_{\nu,l}) = \frac{\partial^2 f}{\partial e_{\nu,l} \partial \tilde{e}_{\nu,l}}(v_{\nu,l}), \text{ falls } v_{\nu,l} \notin \mathcal{V}, \text{ für } l = \begin{cases} 1, \dots, n_1, & \text{falls } \nu = 1, \\ 2, \dots, n_\nu - 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist $\nu > 1$ und $v_\nu \in V_B$ ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, dann erfülle s die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

$$(6.34) \quad D^\omega p^{[\nu,1]}(v_\nu) = D^\omega f(v_\nu), \quad \omega = 0, 1, 2.$$

Ist $\nu \geq 2$ und v_ν ein Randpunkt von $\Delta_{\nu-1}$, dann betrachten wir die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

$$(6.35) \quad \frac{\partial^2 p^{[\nu,l]}}{\partial^2 e_{\nu,l}}(v_\nu) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 e_{\nu,l}}(v_\nu), \text{ falls } e_{\nu,l} \notin \mathcal{E} \text{ gilt, } l = 1, \dots, \lambda_\nu,$$

$$(6.36) \quad D^\omega p^{[\nu,l]}(v_{\nu,l}) = D^\omega f(v_{\nu,l}), \quad l = 1, \dots, \lambda_\nu,$$

$$(6.37) \quad \frac{\partial^2 p^{[\nu,l]}}{\partial e_{\nu,l} \partial \tilde{e}_{\nu,l}}(v_{\nu,l}) = \frac{\partial^2 f}{\partial e_{\nu,l} \partial \tilde{e}_{\nu,l}}(v_{\nu,l}), \text{ falls } v_{\nu,l} \notin \mathcal{V} \text{ gilt, } l = 1, \dots, \lambda_\nu,$$

$$(6.38) \quad \frac{\partial^2 p^{[\nu,l]}}{\partial^2 \tilde{e}_{\nu,l}}(v_{\nu,l}) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 \tilde{e}_{\nu,l}}(v_{\nu,l}), \text{ falls } \tilde{e}_{\nu,l} \notin \mathcal{E} \text{ gilt, } l = 1, \dots, \lambda_\nu + 1.$$

Ist $\lambda_\nu \geq 1$, dann erfülle s die Interpolationsbedingungen (6.35) bis (6.38). Gilt $\lambda_\nu = 0$, dann erfülle s die Interpolationsbedingung (6.38).

Theorem 6.9. *Sei Δ eine beliebige Triangulierung, so dass (6.21) für $\nu = 1, \dots, n$ erfüllt ist. Dann ist V eine Hermite-Interpolationsmenge für $S_4^1(\Delta)$.*

Beweis. Analog zum Beweis von Theorem 6.7 folgt mit den Beziehungen (2.7) zwischen den partiellen Ableitungen und den Bézier-Koeffizienten von s , dass die Hermite-Interpolationsbedingungen die Bézier-Koeffizienten einer wie in (6.1) gegebenen minimal bestimmenden Menge \mathcal{A}_n von $S_4^1(\Delta)$ eindeutig bestimmen. ■

Bemerkung 6.10. *Statt der Bedingungen (6.28), (6.31) und (6.36) können wir auch fordern, dass s für den jeweiligen Eckpunkt v die Interpolationsbedingungen $s(v) = f(v)$, $\frac{\partial s}{\partial x}(v) = \frac{\partial f}{\partial x}(v)$ und $\frac{\partial s}{\partial y}(v) = \frac{\partial f}{\partial y}(v)$ erfüllt, wobei x und y den Einheitsvektor in Richtung der x -Achse bzw. y -Achse bezeichnen.*

6.3 Numerische Ergebnisse

In diesem Abschnitt stellen wir numerische Beispiele zu unserem Hermite-Interpolationsverfahren aus Abschnitt 6.1.2 dar. Wir testen das Hermite-Interpolationsverfahren für uniforme Triangulierungen und für Delaunay-Triangulierungen aus zufällig verteilten Punkten. In den Beispielen wurde Frankes Testfunktion

$$f(x, y) = \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{4}((9x-2)^2+(9y-2)^2)} + \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{49}(9x+1)^2-\frac{1}{10}(9y+1)^2} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}((9x-7)^2+(9y-3)^2)} - \frac{1}{5}e^{-(9x-4)^2-(9y-7)^2}$$

für $(x, y) \in \Omega := [0, 1] \times [0, 1]$ interpoliert. Den ersten Test führen wir auf einer Folge von uniformen Triangulierungen $\Delta_n := \Delta_{m,m}^{(1)}$ mit Eckpunkten $(i/m, j/m)$, $i, j = 0, \dots, m$, durch, wobei $m = 2^n$ für $n = 1, \dots, 7$ gilt. Im Folgenden bezeichnen wir mit s_n den Interpolanten auf der Triangulierung Δ_n . Für jedes n berechnen wir numerisch den maximalen Fehler

$$\epsilon_n = \|f - s_n\|_\infty,$$

wobei wir $(f - s_n)$ für jedes Dreieck auf 28 Punkten auswerten. Tabelle 6.1 zeigt die Anzahl N der Dreiecke von Δ_n , die Anzahl $|V_I|$ der inneren Eckpunkte von Δ_n , die Dimension von $S_4^1(\Delta_n)$, die maximale Kantenlänge h_n der Triangulierung Δ_n , den Fehler ϵ_n und die Konvergenzrate

$$\delta_n := \frac{\log \epsilon_{n-1} - \log \epsilon_n}{\log h_{n-1} - \log h_n}.$$

Die Tests zeigen, dass unsere Interpolationsmethode numerisch die Approximationsordnung vier erreicht.

n	N	$ V_I $	Dim	h_n	ϵ_n	δ_n
1	8	1	51	5,00E-01	3,38E-01	
2	32	9	147	2,50E-01	1,00E-01	1,75
3	128	49	483	1,25E-01	1,21E-02	3,06
4	512	225	1731	6,25E-02	1,17E-03	3,37
5	2048	961	6531	3,13E-02	6,61E-05	4,14
6	8192	3969	25347	1,56E-02	4,24E-06	3,96
7	32768	16129	99843	7,81E-03	2,79E-07	3,93

Tabelle 6.1: Ergebnisse für eine Folge von uniformen Triangulierungen.

Für den zweiten Test interpolieren wir Frankes Testfunktion auf einer Folge $\tilde{\Delta}_n$, $n = 1, \dots, 7$, von Delaunay-Triangulierungen nach der Qualitätsmethode von Ruppert [?] aus zufällig verteilten Punkten. In den vorliegenden Tests verallgemeinern wir das Hermite-Interpolationsverfahren aus Abschnitt 6.1.2 für Triangulierungen beliebigen Grades wie folgt. Wir durchlaufen die Triangulierung nach Algorithmus 2 und wählen in jedem Schritt die Hermite-Interpolationsbedingungen wie in Abschnitt 6.1.2 beschrieben. Im Fall gerader Eckpunkte v_ν mit $\deg(v_\nu) \geq 8$ behandeln wir diese wie Eckpunkte vom Grad sechs. Dabei unterteilen wir jedoch im Fall semisingulärer Fillpunkte den Fill, der zur bereits behandelten Triangulierung hinzugefügt wird, durch einen Clough-Tocher-Split. Wir bezeichnen die Anzahl der notwendigen Clough-Tocher-Splits mit Θ . Tabelle 6.2 zeigt die Ergebnisse für diesen Test. Unsere Methode erreicht auch in diesem Fall numerisch die Approximationsordnung vier.

n	N	Θ	$ V_I $	Dim	h_n	ϵ_n	δ_n
1	10	0	1	63	9.46E-01	3.96E-01	
2	34	1	8	165	6.27E-01	1.34E-01	2.63
3	119	0	43	453	2.50E-01	8.40E-03	3.01
4	515	2	224	1719	1.10E-01	7.03E-04	3.02
5	2065	21	960	6531	5.84E-02	5.31E-05	4.08
6	8635	111	4252	27063	3.00E-02	5.19E-06	3.49
7	32740	390	15963	98919	1.57E-02	4.08E-07	3.93

Tabelle 6.2: Ergebnisse für eine Folge von Delaunay-Triangulierungen aus zufällig verteilten Punkten.

Abbildung 6.1 zeigt den Interpolanten von Frankes Testfunktion auf einer uniformen Tri-

angulierung mit 64 inneren Eckpunkten. Abbildung 6.2 und Abbildung 6.3 zeigen den Interpolanten auf einer Delaunay-Triangulierung mit der gleichen Anzahl innerer Eckpunkte. In Abbildung 6.2 handelt es sich um eine Delaunay-Triangulierung aus zufällig verteilten Punkten. In Abbildung 6.3 wurde die Wahl der Eckpunkte an die Funktion so angepasst, dass an kritischen Stellen mehr Eckpunkte gelegt wurden. Abbildung 6.4 und Abbildung 6.5 zeigen den Interpolanten von Frankes Testfunktion auf einer uniformen Triangulierung mit 196 inneren Eckpunkten bzw. auf einer Delaunay-Triangulierung aus zufällig verteilten Punkten mit ebenfalls 196 inneren Eckpunkten.

Die Tests zeigen, dass ab ca. 1500 Interpolationsbedingungen kein visueller Unterschied zwischen f und s_n besteht (vgl. Abb. 6.4 und 6.5). Darüber hinaus stellen wir fest, dass die Splines selbst für größere Anzahlen von Interpolationsbedingungen effizient berechnet werden können. Alle hier durchgeführten Tests benötigen weniger als 90 Sekunden zur Berechnung auf einem Standard-PC.

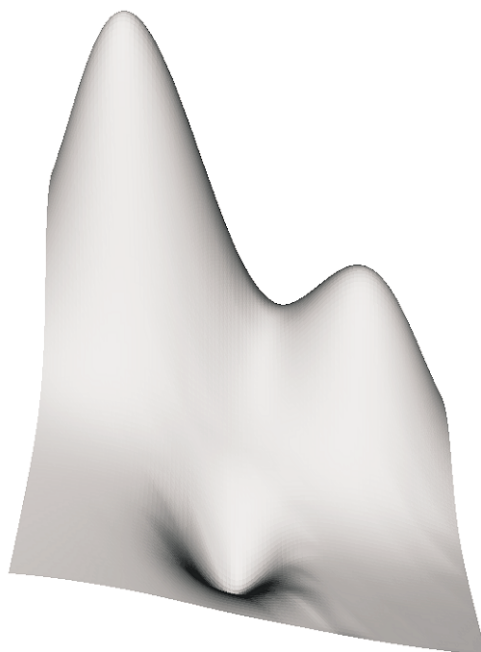


Abb. 6.1: Uniforme Triangulierung Δ , $\dim S_4^1(\Delta) = 597$.

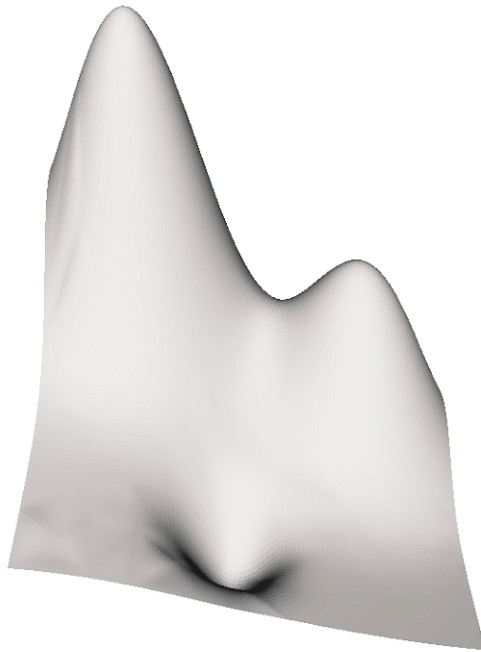


Abb. 6.2: Delaunay-Triangulierung Δ aus zufällig verteilten Punkten, $\dim S_4^1(\Delta) = 597$.

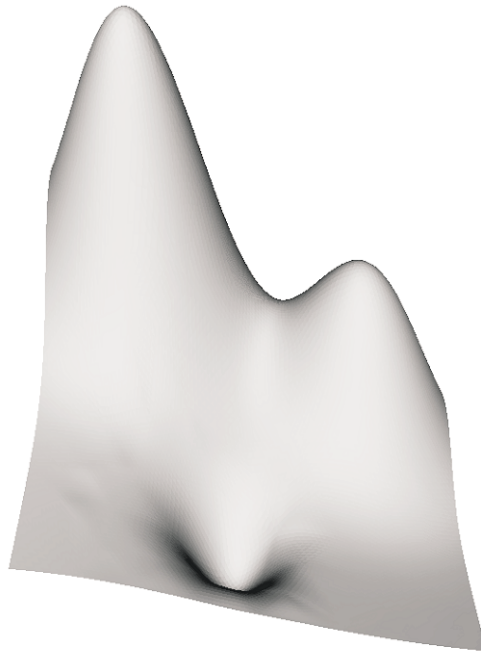


Abb. 6.3: Delaunay-Triangulierung Δ aus angepassten Punkten, $\dim S_4^1(\Delta) = 597$.

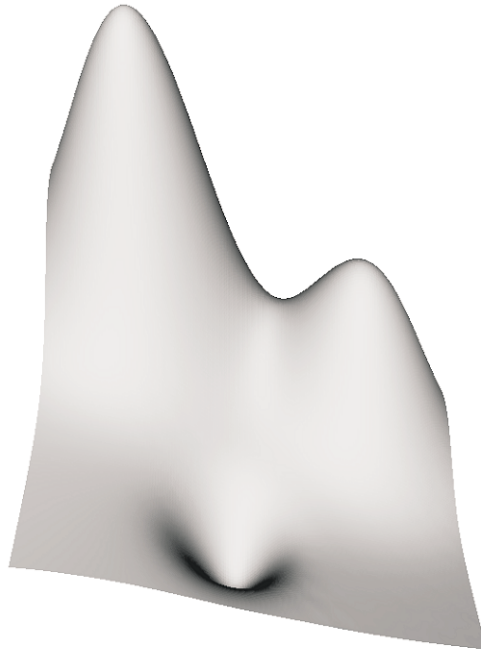


Abb. 6.4: Uniforme Triangulierung Δ , $\dim S_4^1(\Delta) = 1533$.

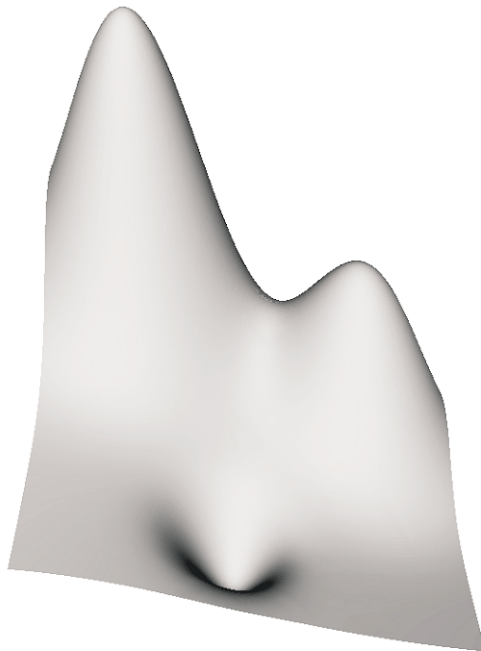


Abb. 6.5: Delaunay-Triangulierung Δ aus zufällig verteilten Punkten, $\dim S_4^1(\Delta) = 1533$.

Kapitel 7

Der Splineraum $S_q^1(\Delta)$, $q \geq 5$

In diesem Kapitel betrachten wir den Splineraum $S_q^1(\Delta)$, $q \geq 5$, für beliebige Triangulierungen Δ . Wir durchlaufen Δ nach Algorithmus 2 aus Abschnitt 3.1. In Abschnitt 7.1 konstruieren wir unter Verwendung unserer Ergebnisse aus Kapitel 4 induktiv eine allgemeine Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_q^1(\Delta)$, $q \geq 5$. Morgan & Scott [42] und Davydov [17] gaben für beliebige Triangulierungen ein spezielles Hermite-Interpolationsschema für $S_q^1(\Delta)$, $q \geq 5$, an. Wir erhalten in Abschnitt 7.2 aus unseren Resultaten aus Abschnitt 7.1 direkt eine große Klasse weiterer Hermite-Interpolationsmengen für $S_q^1(\Delta)$. In Abschnitt 7.3 konstruieren wir unter Verwendung der Methode der Reduktion des Polynomgrades induktiv ein allgemeines Interpolationsschema für $S_q^1(\Delta)$, $q \geq 5$. Daraus folgt das Resultat von Davydov & Nürnberger [18], die eine spezielle Lagrange-Interpolationsmenge für eine Klasse von Triangulierungen beschrieben.

Sei Δ eine beliebige Triangulierung. Algorithmus 2 liefert uns eine Kette $\Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \dots \subset \Delta_n = \Delta$, $n = |\tilde{V}_B| + |V_I|$, von Teiltriangulierungen von Δ . Dabei bezeichne \tilde{V}_B die Menge der Randpunkte von Δ , von denen nur Randkanten ausgehen. Ferner liefert uns Algorithmus 2 eine Indizierung v_ν , $\nu = 1, \dots, n$, der Eckpunkte aus $V_I \cup \tilde{V}_B$.

Nach Konstruktion gilt

$$\begin{aligned}\Delta_1 &:= \Delta_{v_1}, \\ \Delta_\nu &:= \Delta_{\nu-1} \cup K_\nu, \quad \nu = 2, \dots, n,\end{aligned}$$

mit

$$K_\nu := \begin{cases} \cup_{T \in \Delta_{v_\nu} \setminus \Delta_{\nu-1}} T, & \text{falls } v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}, \\ \cup_{T \in \Delta_{v_\nu}} T, & \text{falls } v_\nu \notin V_B^{(\nu-1)} \text{ und } v_\nu \in V_I, \\ \Delta(v_\nu, w, w'), & \text{falls } v_\nu \notin V_B^{(\nu-1)} \text{ und } v_\nu \in V_B, \end{cases}$$

wobei im Fall $v_\nu \in V_B \setminus V_B^{(\nu-1)}$ die Eckpunkte w und w' benachbarte Randpunkte von $\Delta_{\nu-1}$ gilt und ferner $\Delta(v_\nu, w, w') \in \Delta_{v_\nu}$ gilt. Für $\nu = 1, \dots, n$ bezeichne $V_I^{(\nu)}$ die Menge der inneren Eckpunkte, $V_B^{(\nu)}$ die Menge der Randpunkte, $E_I^{(\nu)}$ die Menge der inneren Kanten und $E_B^{(\nu)}$ die Menge der Randkanten von Δ_ν . Ferner bezeichne $S^{(\nu)}$ die Anzahl der singulären Eckpunkte von Δ_ν .

Wir betrachten die Zelle Δ_{v_ν} eines Eckpunkts v_ν . Es sei $n_\nu := \deg(v_\nu)$. Wir nummerieren die Randpunkte der Zelle Δ_{v_ν} gegen den Uhrzeigersinn mit $v_{\nu,0}, \dots, v_{\nu,n_\nu-1}$. Die Kanten von Δ_{v_ν} seien mit $e_{\nu,l} = [v_\nu, v_{\nu,l}]$ und $\tilde{e}_{\nu,l} = [v_{\nu,l-1}, v_{\nu,l}]$, $l = 1, \dots, n_\nu$, bezeichnet. Ferner sei für $l = 1, \dots, n_\nu$ das Dreieck $T^{[\nu,l]}$ gegeben durch $T^{[\nu,l]} = \Delta(v_\nu, v_{\nu,l-1}, v_{\nu,l})$. Die Indizes l seien hierbei sowie im Folgenden stets als l modulo n_ν zu verstehen.

Ist $v_\nu \in V_I \cap V_B^{(\nu)}$, dann gelte

$$K_\nu = \{T^{[\nu,l]} : l = 1, \dots, \lambda_\nu\}. \quad (7.1)$$

Ist v_ν hingegen ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, dann gelte

$$K_\nu = \begin{cases} \{T^{[\nu,l]} : l = 1, \dots, n_\nu\} \text{ mit } [v_{\nu,n_\nu-1}, v_{\nu,n_\nu}] \in E_B^{(\nu-1)}, & \text{falls } v_\nu \in V_I, \\ \Delta(v_\nu, v_{\nu,0}, v_{\nu,1}) \text{ mit } [v_{\nu,0}, v_{\nu,1}] \in E_B^{(\nu-1)}, & \text{falls } v_\nu \in V_B. \end{cases} \quad (7.2)$$

Wir treffen nun drei Aussagen über die lokale Geometrie von Δ , die in den folgenden Abschnitten bei der Wahl von BB-Punkten für eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(\Delta)$ und bei der Wahl von Interpolationspunkten von Bedeutung sind.

Bemerkung 7.1. Sei $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ und $l \in \{1, \dots, \lambda_\nu\}$ oder sei $v_\nu \in V_I$ ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ und $l \in \{1, \dots, n_\nu - 2\}$. Ist $v_{\nu,l}$ ein nicht singulärer Eckpunkt, der bzgl. Δ_ν semisingulär vom Typ I oder II ist, dann gilt nach Konstruktion, dass $\tilde{e}_{\nu,l}$ und $\tilde{e}_{\nu,l+1}$ bzgl. $v_{\nu,l}$ nicht degeneriert sind (vgl. Abb. 7.1).

Ist $v_{\nu,l}$ ein Fillpunkt bzgl. Δ_ν , dann gilt offensichtlich $\deg(v_{\nu,l}) = 3$, und sowohl $\tilde{e}_{\nu,l}$ als auch $\tilde{e}_{\nu,l+1}$ sind bzgl. $v_{\nu,l}$ nicht degeneriert (vgl. Abb. 7.1).

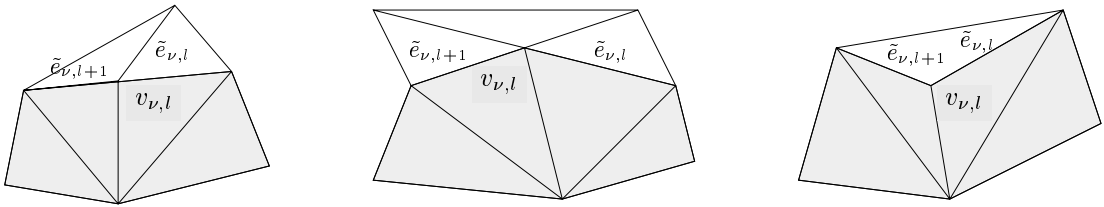


Abb. 7.1: Ist $v_{\nu,l}$, $l \in \{1, \dots, \lambda_\nu\}$, semisingulär bzgl. K_ν (links, Mitte) oder ein Fillpunkt bzgl. K_ν (rechts), so sind die Kanten $\tilde{e}_{\nu,l}$ und $\tilde{e}_{\nu,l+1}$ beide bzgl. $v_{\nu,l}$ nicht degeneriert.

Bemerkung 7.2. Sei $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$. Ferner seien $\tilde{e}_0 = \tilde{e}_{\nu,1}$ und $\tilde{e}_{\lambda_\nu+1} = \tilde{e}_{\nu,\lambda_\nu+1}$. Es sei $v_{\nu,l}$, $l \in \{0, \lambda_\nu + 1\}$, ein nicht singulärer Eckpunkt. Dann gilt:

- (i) Ist $v_{\nu,l}$ semisingulär vom Typ I bzgl. Δ_ν und ist \tilde{e}_l bzgl. $v_{\nu,l}$ degeneriert, dann ist $v_{\nu,l}$ bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ semisingulär vom Typ II.
- (ii) Ist $v_{\nu,l}$ semisingulär vom Typ II bzgl. Δ_ν , dann ist \tilde{e}_l bzgl. $v_{\nu,l}$ nicht degeneriert.
- (iii) Ist $v_{\nu,l}$ ein Flappunkt bzgl. Δ_ν und ist \tilde{e}_l bzgl. $v_{\nu,l}$ degeneriert, dann ist $v_{\nu,l}$ bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ semisingulär.

Bemerkung 7.3. Ist v_ν ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, $\nu \geq 1$, so folgt, dass alle Randpunkte von $\Delta_{\nu-1}$ auch Randpunkte von Δ sind, da die Eckpunkte v_1, \dots, v_n nach Algorithmus 2 indiziert wurden. Insbesondere gilt somit $v_{\nu,0}, v_{\nu,1} \in V_B$.

7.1 Minimal bestimmende Mengen

Sei Δ eine beliebige Triangulierung. Im Folgenden definieren wir induktiv eine allgemeine Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_q^1(\Delta)$, $q \geq 5$.

Konstruktion minimal bestimmender Mengen:

Wir definieren

$$\mathcal{A} := \bigcup_{\nu=1}^n (\mathcal{A}_{K_\nu} \setminus \mathcal{P}_\nu). \quad (7.3)$$

Die Mengen $\mathcal{A}_{K_\nu} \subset \mathcal{B}_q(K_\nu)$ seien wie folgt gewählt.

Es sei \mathcal{A}_{K_1} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(\Delta_1)$, die wie in Theorem 4.8, 4.9, 4.10 oder 4.16 definiert ist.

Für $\nu \geq 2$ unterscheiden wir die folgenden Fälle.

Fall 1: Es gilt $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ und $\lambda_\nu \geq 1$.

Dann sei die Menge \mathcal{A}_{K_ν} wie in (4.36) gegeben, falls v_ν bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ nicht semisingulär ist, und anderenfalls sei die Menge \mathcal{A}_{K_ν} wie in (4.37) gegeben.

Fall 2: Es gilt $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ und $\lambda_\nu = 0$.

Dann gelte $\mathcal{A}_{K_\nu} := \{P_{i,j,k}^{[\nu,1]} : j, k \geq 2, i + j + k = q\}$.

Fall 3: Es gilt $v_\nu \in V_I$ und v_ν ist ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$.

Es sei $\mathcal{A}_{\Delta_{v_\nu}}$ eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(\Delta)$ auf $\mathcal{B}_q(K_\nu)$, die wie in Theorem 4.8, 4.9, 4.10 oder 4.16 definiert ist, wobei $\{P_{i,j,k}^{[\nu,n_\nu]} : i \leq 1, i + j + k = q\} \subset \mathcal{A}_{\Delta_{v_\nu}}$ gelte. Dann setzen wir $\mathcal{A}_{K_\nu} := \mathcal{A}_{\Delta_{v_\nu}} \setminus \{P_{i,j,k}^{[\nu,n_\nu]} : i \leq 1, i + j + k = q\}$.

Fall 4: Es gilt $v_\nu \in V_B$ und v_ν ist ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$.

Dann gelte $\mathcal{A}_{K_\nu} := \{P_{i,j,k}^{[\nu,1]} : i \geq 2, i+j+k=q\}$.

Ferner benötigen wir für die Definition der Menge \mathcal{A} in (7.3) die Mengen \mathcal{P}_ν , $\nu = 1, \dots, n$. \mathcal{P}_1 enthalte die folgenden BB-Punkte. Ist $v_{1,l}$, $l \in \{1, \dots, n_1\}$, ein nicht singulärer Eckpunkt, der entweder ein Fillpunkt oder semisingulär bzgl. Δ_1 ist, dann sei $P_{1,l} \in \{P_{0,q-2,2}^{[1,l]}, P_{0,2,q-2}^{[1,l+1]}\}$ und es gelte $P_{1,l} \in \mathcal{P}_1$.

Ist $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$, $\nu \geq 2$, dann enthalte \mathcal{P}_ν die folgenden BB-Punkte.

- Ist $v_{\nu,0}$ ein nicht singulärer Eckpunkt, der entweder ein Fillpunkt oder semisingulär bzgl. Δ_ν ist, und ist $\tilde{e}_{\nu,1}$ bzgl. $v_{\nu,0}$ nicht degeneriert, dann gelte $P_{0,2,q-2}^{[\nu,1]} \in \mathcal{P}_\nu$.
- Ist $v_{\nu,l}$, $1 \leq l \leq \lambda_\nu$, ein nicht singulärer Eckpunkt, der entweder ein Fillpunkt oder semisingulär bzgl. Δ_ν ist, dann sei $P_{\nu,l} \in \{P_{0,q-2,2}^{[\nu,l]}, P_{0,2,q-2}^{[\nu,l+1]}\}$ und es gelte $P_{\nu,l} \in \mathcal{P}_\nu$.
- Ist $v_{\nu,\lambda_\nu+1}$ ein nicht singulärer Eckpunkt, der ein Fillpunkt oder semisingulär bzgl. Δ_ν ist, und ist $\tilde{e}_{\nu,\lambda_\nu+1}$ bzgl. $v_{\nu,\lambda_\nu+1}$ nicht degeneriert, dann gelte $P_{0,q-2,2}^{[\nu,\lambda_\nu+1]} \in \mathcal{P}_\nu$.

Ist $v_\nu \in V_I$, $\nu \geq 2$, ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, dann enthalte \mathcal{P}_ν die folgenden BB-Punkte. Ist $v_{\nu,l}$, $2 \leq l \leq n_\nu - 1$, ein nicht singulärer Eckpunkt, der entweder ein Fillpunkt oder semisingulär bzgl. Δ_ν ist, dann sei $P_{\nu,l} \in \{P_{0,q-2,2}^{[\nu,l]}, P_{0,2,q-2}^{[\nu,l+1]}\}$ und es gelte $P_{\nu,l} \in \mathcal{P}_\nu$. Ist $v_\nu \in V_B$, $\nu \geq 2$, ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, dann gelte $\mathcal{P}_\nu = \emptyset$.

Nach Konstruktion von \mathcal{P}_ν , $\nu = 1, \dots, n$, gelten die folgenden Aussagen.

Bemerkung 7.4. Gilt $\mathcal{P}_\nu \neq \emptyset$, $1 \leq \nu \leq n$, dann liegen die BB-Punkte aus \mathcal{P}_ν auf Randkanten von Δ_ν . Ferner sind die BB-Punkte aus \mathcal{P}_ν in keiner C^1 -Menge von v_ν bzgl. der Kanten $e_{\nu,l}$, $l = 0, \dots, \lambda_\nu + 1$, enthalten.

Bemerkung 7.5. Beim Hinzufügen von K_ν zu $\Delta_{\nu-1}$ wird für jeden Fillpunkt oder semisingulären Eckpunkt bzgl. Δ_ν ein BB-Punkt zur Menge \mathcal{P}_ν hinzugefügt, soweit eine Randkante von K_ν existiert, die bzgl. des Eckpunkts nicht degeneriert ist. Ferner gilt, dass dieser BB-Punkt auf einer der Randkanten von K_ν , die bzgl. des Eckpunkts nicht degeneriert sind, liegen muss.

Bemerkung 7.6. Ist $v_{\nu,0}$ ein Fillpunkt oder ein semisingulärer Eckpunkt bzgl. Δ_ν und ist $\tilde{e}_{\nu,1}$ bzgl. $v_{\nu,0}$ degeneriert, dann folgt mit Bemerkung 7.2 sowie nach Definition der Mengen \mathcal{P}_μ , $\mu = 1, \dots, \nu - 1$, dass für $v_{\nu,0}$ bereits ein geeigneter BB-Punkt in einer der Mengen \mathcal{P}_μ , $\mu = 1, \dots, \nu - 1$, enthalten ist. Analog gilt dies für den Eckpunkt $v_{\nu,\lambda_\nu+1}$.

Das folgende Theorem besagt, dass die in (7.3) definierte Menge \mathcal{A} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(\Delta)$ ist.

Theorem 7.7. *Sei $q \geq 5$. Dann ist \mathcal{A} in (7.3) eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(\Delta)$.*

Beweis. Sei $q \geq 5$ und $s \in S_q^1(\Delta)$. Wir zeigen zunächst, dass \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_q^1(\Delta)$ ist. Es gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}$. Dann ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_q(\Delta)$ gilt. Für $\nu = 1, \dots, n$ und $l = 1, \dots, n_\nu$ sei $s|_{T^{[\nu, l]}}$ in der BB-Darstellung (2.5) gegeben. Es sei $\mathcal{A}_\nu := \cup_{\mu=1}^\nu (\mathcal{A}_{K_\mu} \setminus \mathcal{P}_\mu)$, $\nu = 1, \dots, n$. Im Folgenden zeigen wir, dass gilt:

$$\lambda_P s = 0, \quad P \in \mathcal{A}_\nu \quad \Rightarrow \quad \lambda_P s = 0, \quad P \in \mathcal{B}_q(\Delta_\nu), \quad \nu = 1, \dots, n. \quad (7.4)$$

Da $\Delta_n = \Delta$ gilt, folgt aus (7.4), dass \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_q^1(\Delta)$ ist.

Beweis von (7.4) durch vollständige Induktion nach ν .

Induktionsanfang $\nu = 1$. Nach Konstruktion von \mathcal{A}_{K_1} und mit Bemerkung 7.4 folgt direkt

$$\lambda_P s = 0, \quad P \in \mathcal{B}_q(\Delta_1) \setminus \mathcal{P}_1. \quad (7.5)$$

Ist $\mathcal{P}_1 = \emptyset$, dann folgt damit bereits die Behauptung.

Ist $\mathcal{P}_1 \neq \emptyset$, dann sei $v_{1,l}$, $l \in \{1, \dots, n_1\}$, entweder ein Fillpunkt bzgl. Δ_1 oder ein nicht singulärer Eckpunkt, der bzgl. Δ_1 semisingulär ist. O.B.d.A. sei $v_{1,l}$ semisingulär vom Typ II bzgl. Δ_1 , und es gelte $P_{0,2,q-2}^{[1,l+1]} \in \mathcal{P}_1$. Wir zeigen, dass in diesem Fall $a_{0,2,q-2}^{[1,l+1]} = 0$ folgt. (Der Fall $P_{0,q-2,2}^{[1,l]} \in \mathcal{P}_1$ und der Fall, dass $v_{1,l}$ ein Fillpunkt oder semisingulär vom Typ I bzgl. Δ_1 ist, lassen sich analog zeigen.) Wir nummerieren die Dreiecke mit Eckpunkt $v_{1,l}$, die nicht in Δ_1 enthalten sind gegen den Uhrzeigersinn mit $T^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, d. h. es gilt $T^{(1)} = \Delta(v_{1,l}, w_1, v_{1,l-1})$, $T^{(2)} = \Delta(v_{1,l}, w_2, w_1)$ und $T^{(3)} = \Delta(v_{1,l}, v_{1,l+1}, w_2)$, wobei w_1, w_2 die Eckpunkte außerhalb von Δ_1 bezeichnen. Ferner sei e_j die gemeinsame Kante von $T^{(j)}$ und $T^{(j+1)}$, $j = 1, 2$. Mit (7.5) gilt insbesondere $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in (D_2(v_{1,l}) \cap \mathcal{B}_q(\Delta_1)) \setminus \{P_{0,2,q-2}^{[1,l+1]}\}$. Aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen an dem Eckpunkt $v_{1,l}$ erhalten wir somit $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in D_1(v_{1,l})$. Da $T^{(1)}$ eine gemeinsame Kante mit $T^{[1,l]}$ hat, folgt des Weiteren aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen an dieser Kante für den Koeffizienten $a_{q-2,1,1}^{(1)}$ von $p_1 \in \tilde{\Pi}_q$ auf $T^{(1)}$, dass $a_{q-2,1,1}^{(1)} = 0$ gilt. Ferner folgt, da e_1 und e_2 degeneriert sind, für die Koeffizienten $a_{q-2,1,1}^{(j)}$ von $p_j \in \tilde{\Pi}_q$ auf $T^{(j)}$, dass $a_{q-2,1,1}^{(j)} = 0$, $j = 2, 3$, gilt. Da $\bar{e}_{1,l+1}$ nach Voraussetzung bzgl. $v_{1,l}$ nicht degeneriert ist, folgt dann aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen $a_{0,2,q-2}^{[1,l+1]} = 0$ und somit die Behauptung für $\nu = 1$.

Induktionsschritt $\nu - 1 \rightarrow \nu$. Die Behauptung (7.4) sei für $\nu - 1$ bereits bewiesen. Nach Induktionsannahme sowie nach Konstruktion von \mathcal{A}_{K_ν} folgt $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_q(\Delta_\nu) \setminus \mathcal{P}_\nu$. Gilt $\mathcal{P}_\nu \neq \emptyset$, dann erhalten wir analog zum Beweis für den Fall $\nu = 1$, dass $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{P}_\nu$ gilt. Daraus folgt bereits die Behauptung. \square

Es bleibt zu zeigen, dass \mathcal{A} minimal ist. Wir zeigen im Folgenden, dass für $\nu = 1, \dots, n$

gilt:

$$|\mathcal{A}_\nu| = \frac{(q+1)(q+2)}{2} + |E_I^{(\nu)}| \frac{q(q-1)}{2} - |V_I^{(\nu)}| \left(\frac{(q+1)(q+2)}{2} - 3 \right) - \sum_{\mu=1}^{\nu} |\mathcal{P}_\mu| + |\tilde{V}^{(\nu)}| + S^{(\nu)}, \quad (7.6)$$

wobei $\tilde{V}^{(\nu)}$ die Menge der nicht singulären Eckpunkte v_μ , $2 \leq \mu \leq \nu$, bezeichnet, die entweder ein Flappunkt oder semisingulär bzgl. $\Delta_{\mu-1}$ sind. Nach Konstruktion enthält \mathcal{P}_ν für jeden semisingulären Eckpunkt $v_{\nu,l}$ von K_ν bzgl. Δ_ν , von dem mindestens eine bzgl. $v_{\nu,l}$ nicht degenerierte Randkante von K_ν ausgeht, einen BB-Punkt. Somit gilt offensichtlich

$$\sum_{\nu=1}^n |\mathcal{P}_\nu| = |\tilde{V}^{(n)}|.$$

Ist (7.6) gezeigt, folgt dann wegen $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}$ und $\Delta_n = \Delta$ aus den Theoremen 2.4 und 2.3 bereits, dass \mathcal{A} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^1(\Delta)$ ist.

Beweis von (7.6) durch vollständige Induktion nach ν .

Induktionsanfang $\nu = 1$. Nach Konstruktion gilt $|\mathcal{A}_1| = n_1 \frac{q(q-1)}{2} + 3 + \sigma_{v_1} - |\mathcal{P}_1|$. Da $|V_I^{(1)}| = 1$, $|E_I^{(1)}| = n_1$, $S^{(1)} = \sigma_{v_1}$ und $|\tilde{V}^{(1)}| = 0$ gilt, folgt daraus bereits (7.6).

Induktionsschritt $\nu-1 \rightarrow \nu$. Die Behauptung (7.6) sei für $\nu-1$ bereits bewiesen. Ist $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$, dann gilt $|E^{(\nu)}| = |E^{(\nu-1)}| + (\lambda_\nu + 2)$, $|V^{(\nu)}| = |V^{(\nu-1)}| + 1$ und $S^{(\nu)} = S^{(\nu-1)} + \sigma_{v_\nu}$. Ferner ist $|\tilde{V}^{(\nu)}| = |\tilde{V}^{(\nu-1)}|$, falls $v_\nu \notin \tilde{V}^{(\nu)}$ gilt, bzw. es ist $|\tilde{V}^{(\nu)}| = |\tilde{V}^{(\nu-1)}| + 1$, falls $v_\nu \in \tilde{V}^{(\nu)}$ gilt. Nach Konstruktion von \mathcal{A}_ν erhalten wir

$$|\mathcal{A}_\nu| = |\mathcal{A}_{\nu-1}| + \begin{cases} (\lambda_\nu + 2) \frac{q(q-1)}{2} - \frac{(q+1)(q+2)}{2} + 3 + \sigma_{v_\nu} - |\mathcal{P}_\nu|, & \text{falls } v_\nu \notin \tilde{V}^{(\nu)}, \\ \lambda_\nu \frac{q(q-1)}{2} + \frac{(q-3)(q-2)}{2} - |\mathcal{P}_\nu|, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Induktionsannahme folgt dann (7.6).

Ist $v_\nu \in V_I$ ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, dann gilt nach Konstruktion von Δ_ν $|E^{(\nu)}| = |E^{(\nu-1)}| + (n_\nu + 1)$, $|V^{(\nu)}| = |V^{(\nu-1)}| + 1$, $S^{(\nu)} = S^{(\nu-1)} + \sigma_{v_\nu}$ und $|\tilde{V}^{(\nu)}| = |\tilde{V}^{(\nu-1)}|$. Nach Konstruktion von \mathcal{A}_ν erhalten wir

$$|\mathcal{A}_\nu| = |\mathcal{A}_{\nu-1}| + n_\nu \frac{q(q-1)}{2} + 3 + \sigma_{v_\nu} - (2q + 1) - |\mathcal{P}_\nu|,$$

so dass nach Induktionsannahme (7.6) folgt.

Ist $v_\nu \in V_B$ ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, dann gilt nach Konstruktion von Δ_ν $|E^{(\nu)}| = |E^{(\nu-1)}| + 1$, $|V^{(\nu)}| = |V^{(\nu-1)}|$, $S^{(\nu)} = S^{(\nu-1)}$, $|\tilde{V}^{(\nu)}| = |\tilde{V}^{(\nu-1)}|$ und $|\mathcal{P}_\nu| = 0$. Nach Konstruktion von \mathcal{A}_ν gilt

$$|\mathcal{A}_\nu| = |\mathcal{A}_{\nu-1}| + \frac{q(q-1)}{2},$$

so dass nach Induktionsannahme (7.6) folgt. ■

7.2 Hermite-Interpolation

Aus unserer Beschreibung minimal bestimmender Mengen von $S_q^1(\Delta)$, $q \geq 5$, aus dem vorherigen Abschnitt erhalten wir direkt allgemeine Hermite-Interpolationsmengen für $S_q^1(\Delta)$ für beliebige Triangulierungen. Für die Konstruktion der Hermite-Interpolationsmengen für $S_q^1(\Delta)$, $q \geq 5$, benötigen wir die Menge $\tilde{\mathcal{E}}_H \subset V \times E$, die für $\nu = 1, \dots, n$ die folgenden Elemente enthalte:

- Ist $\nu = 1$ oder ist $v_\nu \in V_I$ ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ und ist ferner v_ν nicht singulär, dann sei $l_\nu \in \{0, \dots, n_\nu - 1\}$ so gegeben, dass e_{ν, l_ν} bzgl. v_ν nicht degeneriert ist, und es gelte $(v_\nu, e_{\nu, l_\nu}) \in \tilde{\mathcal{E}}_H$.
- Gilt für $\nu \geq 2$, dass $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ nicht semisingulär ist und ferner $\lambda_\nu \geq 1$ ist, dann sei $l_\nu \in \{1, \dots, \lambda_\nu\}$ so gegeben, dass e_{ν, l_ν} bzgl. v_ν nicht degeneriert ist, und es gelte $(v_\nu, e_{\nu, l_\nu}) \in \tilde{\mathcal{E}}_H$.
- Ist $v_{1, l}$, $1 \leq l \leq n_1$, ein nicht singulärer Eckpunkt, der entweder ein Fillpunkt oder semisingulär bzgl. Δ_1 ist, dann gelte entweder $(v_{\nu, l}, \tilde{e}_{\nu, l}) \in \tilde{\mathcal{E}}_H$ oder $(v_{\nu, l}, \tilde{e}_{\nu, l+1}) \in \tilde{\mathcal{E}}_H$.
- Sei $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$, $\nu \geq 2$.
 - Ist $v_{\nu, 0}$ ein nicht singulärer Eckpunkt, der entweder ein Fillpunkt oder semisingulär bzgl. Δ_ν ist, und ist ferner $\tilde{e}_{\nu, 1}$ bzgl. $v_{\nu, 0}$ nicht degeneriert, dann gelte $(v_{\nu, 0}, \tilde{e}_{\nu, 1}) \in \tilde{\mathcal{E}}_H$.
 - Ist $v_{\nu, l}$, $1 \leq l \leq \lambda_\nu$, ein nicht singulärer Eckpunkt, der entweder ein Fillpunkt oder semisingulär bzgl. Δ_ν ist, dann gelte entweder $(v_{\nu, l}, \tilde{e}_{\nu, l}) \in \tilde{\mathcal{E}}_H$ oder $(v_{\nu, l}, \tilde{e}_{\nu, l+1}) \in \tilde{\mathcal{E}}_H$.
 - Ist $v_{\nu, \lambda_\nu+1}$ ein nicht singulärer Eckpunkt, der entweder ein Fillpunkt oder semisingulär bzgl. Δ_ν ist, und ist ferner $\tilde{e}_{\nu, \lambda_\nu+1}$ bzgl. $v_{\nu, \lambda_\nu+1}$ nicht degeneriert, dann gelte $(v_{\nu, 0}, \tilde{e}_{\nu, \lambda_\nu+1}) \in \tilde{\mathcal{E}}_H$.
- Sei $v_\nu \in V_I$ ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, $\nu \geq 2$. Ist $v_{\nu, l}$, $l \in \{1, \dots, n_\nu - 2\}$, ein nicht singulärer Eckpunkt, der entweder ein Fillpunkt oder semisingulär bzgl. Δ_ν ist, dann sei entweder $(v_{\nu, l}, \tilde{e}_{\nu, l}) \in \tilde{\mathcal{E}}_H$ oder $(v_{\nu, l}, \tilde{e}_{\nu, l+1}) \in \tilde{\mathcal{E}}_H$.

Sei $s \in S_q^1(\Delta)$, $q \geq 5$, und $p^{[\nu, l]} := s|_{T^{[\nu, l]}}$, $l = 1, \dots, n_\nu$, $n = 1, \dots, n$. Sei $f \in C(\Omega)$ genügend oft differenzierbar. Ferner seien $D^\omega p^{[\nu, l]}$ bzw. $D^\omega f$, $\nu = 1, \dots, n$, $l = 1, \dots, n_\nu$, $\omega \in \mathbb{N}$, wie in (2.3) definiert.

Konstruktion von Hermite-Interpolationsmengen:

Ist $\nu = 1$ oder ist $v_\nu \in V_I$, $2 \leq \nu \leq n$, ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, dann erfülle s die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

$$(7.7) \quad D^\omega p^{[\nu,l]}(v_\nu) = D^\omega f(v_\nu), \quad \omega = 0, 1, \text{ für ein } l \in \{1, \dots, n_\nu\},$$

$$(7.8) \quad \frac{\partial^2 p^{[\nu,l]}}{\partial^2 e_{\nu,l}}(v_\nu) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 e_{\nu,l}}(v_\nu), \text{ falls } (v_\nu, e_{\nu,l}) \notin \tilde{\mathcal{E}}_H \text{ gilt, } l = 1, \dots, n_\nu,$$

$$(7.9) \quad \frac{\partial^2 p^{[\nu,l]}}{\partial e_{\nu,l} \partial e_{\nu,l-1}}(v_\nu) = \frac{\partial^2 f}{\partial e_{\nu,l} \partial e_{\nu,l-1}}(v_\nu) \text{ für ein } l \in \{1, \dots, n_\nu\},$$

$$(7.10) \quad \frac{\partial^\rho p^{[\nu,l]}}{\partial^\rho e_{\nu,l}}(v_{\nu,l}) = \frac{\partial^\rho f}{\partial^\rho e_{\nu,l}}(v_{\nu,l}) \quad \text{und} \quad \frac{\partial^{\rho+1} p^{[\nu,l]}}{\partial^\rho e_{\nu,l} \partial \tilde{e}_{\nu,l}}(v_{\nu,l}) = \frac{\partial^{\rho+1} f}{\partial^\rho e_{\nu,l} \partial \tilde{e}_{\nu,l}}(v_{\nu,l})$$

für $\rho = 0, \dots, q-3$ und $l = 1, \dots, n_1$, falls $\nu = 1$ gilt, bzw. $l = 1, \dots, n_\nu - 2$, falls $\nu > 1$ gilt,

$$(7.11) \quad \frac{\partial^\rho p^{[\nu,1]}}{\partial^\rho e_{\nu,l}}(v_{\nu,l}) = \frac{\partial^\rho f}{\partial^\rho e_{\nu,l}}(v_{\nu,l}) \quad \text{und} \quad \frac{\partial^{\rho+1} p^{[\nu,1]}}{\partial^\rho e_{\nu,l} \partial \tilde{e}_{\nu,1}}(v_{\nu,l}) = \frac{\partial^{\rho+1} f}{\partial^\rho e_{\nu,l} \partial \tilde{e}_{\nu,1}}(v_{\nu,l})$$

für $\rho = 2, \dots, q-3$ und $l = n_\nu - 1, n_\nu$, falls $\nu > 1$ gilt,

$$(7.12) \quad \frac{\partial^2 p^{[\nu,l]}}{\partial^2 \tilde{e}_{\nu,l}}(v_{\nu,l}) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 \tilde{e}_{\nu,l}}(v_{\nu,l}), \text{ falls } (v_{\nu,l}, \tilde{e}_{\nu,l}) \notin \tilde{\mathcal{E}}_H \text{ gilt, } l = \begin{cases} 1, \dots, n_1, & \nu = 1, \\ 1, \dots, n_\nu - 1, & \nu > 1, \end{cases}$$

$$(7.13) \quad \frac{\partial^2 p^{[\nu,l+1]}}{\partial^2 \tilde{e}_{\nu,l+1}}(v_{\nu,l}) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 \tilde{e}_{\nu,l+1}}(v_{\nu,l}), \text{ falls } (v_{\nu,l}, \tilde{e}_{\nu,l+1}) \notin \tilde{\mathcal{E}}_H, l = \begin{cases} 1, \dots, n_1, & \nu = 1, \\ 0, \dots, n_\nu - 2, & \nu > 1, \end{cases}$$

$$(7.14) \quad \frac{\partial^{\rho+\sigma} p^{[\nu,l]}}{\partial^\rho \tilde{e}_{\nu,l} \partial^\sigma e_{\nu,l}}(v_{\nu,l}) = \frac{\partial^{\rho+\sigma} f}{\partial^\rho \tilde{e}_{\nu,l} \partial^\sigma e_{\nu,l}}(v_{\nu,l}) \text{ für } \rho \geq 2, \rho + \sigma \leq q-2, (\rho, \sigma) \notin \{(2, 0), (q-2, 0)\} \text{ und } l = 1, \dots, n_\nu, \text{ wobei für } \nu > 1 \text{ im Fall } l = n_\nu \text{ ferner } \sigma \geq 2 \text{ gelte.}$$

Ist $\nu > 1$ und $v_\nu \in V_B$ ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, dann erfülle s die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

$$(7.15) \quad D^\omega p^{[\nu,1]}(v_\nu) = D^\omega f(v_\nu), \quad \omega = 0, \dots, q-2.$$

Ist $\nu \geq 2$ und v_ν ein Randpunkt von $\Delta_{\nu-1}$, dann betrachten wir die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen für s auf K_ν :

$$(7.16) \quad \frac{\partial^2 p^{[\nu,l]}}{\partial^2 e_{\nu,l}}(v_\nu) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 e_{\nu,l}}(v_\nu), \text{ falls } (v_\nu, e_{\nu,l}) \notin \tilde{\mathcal{E}}_H \text{ gilt, } 1 \leq l \leq \lambda_\nu,$$

$$(7.17) \quad \frac{\partial^\rho p^{[\nu,l]}}{\partial^\rho e_{\nu,l}}(v_{\nu,l}) = \frac{\partial^\rho f}{\partial^\rho e_{\nu,l}}(v_{\nu,l}) \quad \text{und} \quad \frac{\partial^{\rho+1} p^{[\nu,l]}}{\partial^\rho e_{\nu,l} \partial \tilde{e}_{\nu,l}}(v_{\nu,l}) = \frac{\partial^{\rho+1} f}{\partial^\rho e_{\nu,l} \partial \tilde{e}_{\nu,l}}(v_{\nu,l})$$

für $\rho = 0, \dots, q-3, 1 \leq l \leq \lambda_\nu$,

$$(7.18) \quad \frac{\partial^2 p^{[\nu,l]}}{\partial^2 \tilde{e}_{\nu,l}}(v_{\nu,l}) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 \tilde{e}_{\nu,l}}(v_{\nu,l}), \text{ falls } (v_{\nu,l}, \tilde{e}_{\nu,l}) \notin \tilde{\mathcal{E}}_H \text{ gilt, } l = 1, \dots, \lambda_\nu + 1,$$

$$(7.19) \quad \frac{\partial^2 p^{[\nu,l+1]}}{\partial^2 \tilde{e}_{\nu,l+1}}(v_{\nu,l}) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 \tilde{e}_{\nu,l+1}}(v_{\nu,l}), \text{ falls } (v_{\nu,l}, \tilde{e}_{\nu,l+1}) \notin \tilde{\mathcal{E}}_H \text{ gilt, } l = 0, \dots, \lambda_\nu,$$

$$(7.20) \quad \frac{\partial^{\rho+\sigma} p^{[\nu,l]}}{\partial^\rho \tilde{e}_{\nu,l} \partial^\sigma e_{\nu,l}} (v_{\nu,l}) = \frac{\partial^{\rho+\sigma} f}{\partial^\rho \tilde{e}_{\nu,l} \partial^\sigma e_{\nu,l}} (v_{\nu,l}) \text{ für } \rho \geq 2, \rho + \sigma \leq q - 2, (\rho, \sigma) \notin \{(2, 0), (q - 2, 0)\} \text{ und } l = 1, \dots, \lambda_\nu + 1.$$

Gilt $\lambda_\nu \geq 1$, dann erfülle s die Interpolationsbedingungen (7.16) bis (7.20). Ist $\lambda_\nu = 0$, dann erfülle s die Interpolationsbedingungen (7.18) bis (7.20).

Theorem 7.8. *Sei $q \geq 5$. Dann ist V eine Hermite-Interpolationsmenge für $S_q^1(\Delta)$.*

Beweis. Analog zum Beweis von Theorem 7.7 folgt mit den Beziehungen (2.7) zwischen den partiellen Ableitungen und den Bézier-Koeffizienten von s , dass die Hermite-Interpolationsbedingungen die Bézier-Koeffizienten einer wie in (7.3) gegebenem minimal bestimmenden Menge \mathcal{A} von $S_q^1(\Delta)$ eindeutig bestimmen. ■

7.3 Lagrange-Interpolation

Im Folgenden konstruieren wir induktiv allgemeine Lagrange-Interpolationsmengen für $S_q^1(\Delta)$, $q \geq 5$, für beliebige Triangulierungen. Da keine direkten Beziehungen zwischen den Punkten einer minimal bestimmenden Mengen und Lagrange-Interpolationspunkten bestehen, gehen wir bei der Konstruktion der Lagrange-Interpolationsmengen nach der folgenden Vorgehensweise vor. Wir wählen zunächst Lagrange-Interpolationspunkte auf den Kanten der Kegel und Zellen. Wir erreichen somit für jedes Dreieck eine Reduktion des Polynomgrades, die wir durch die Wahl weiterer Interpolationspunkte auf geeigneten Geradensegmenten weiterführen können. Wir erhalten auf diese Weise ein allgemeines Lagrange-Interpolationsschema für $S_q^1(\Delta)$, $q \geq 5$, für beliebige Triangulierungen, das die von Davydov & Nürnberger [18] beschriebene Lagrange-Interpolationsmenge umfasst.

Es sei $\tilde{\mathcal{E}}_L \subset V \times E$, und $\tilde{\mathcal{E}}_L$ enthalte die folgenden Elemente:

- Gilt für $\nu \geq 1$, dass $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ nicht semisingulär und ferner $\lambda_\nu \geq 1$ ist, dann sei $l_\nu \in \{1, \dots, \lambda_\nu\}$ so gegeben, dass e_{ν,l_ν} bzgl. v_ν nicht degeneriert ist, und es gelte $(v_\nu, e_{\nu,l_\nu}) \in \tilde{\mathcal{E}}_L$.
- Sei $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$, $\nu \geq 1$.
 - Ist $v_{\nu,0}$ ein nicht singulärer Eckpunkt, der entweder ein Fillpunkt oder semisingulär bzgl. Δ_ν ist, und ist ferner $\tilde{e}_{\nu,1}$ bzgl. $v_{\nu,0}$ nicht degeneriert, dann gelte $(v_{\nu,0}, \tilde{e}_{\nu,1}) \in \tilde{\mathcal{E}}_L$.
 - Ist $v_{\nu,l}$, $1 \leq l \leq \lambda_\nu$, ein nicht singulärer Eckpunkt, der entweder ein Fillpunkt oder semisingulär bzgl. Δ_ν ist, dann gelte $(v_{\nu,l}, \tilde{e}_{\nu,l+1}) \in \tilde{\mathcal{E}}_L$.

- Ist $v_{\nu, \lambda_\nu + 1}$ ein nicht singulärer Eckpunkt, der entweder ein Fillpunkt oder semisingulär bzgl. Δ_ν ist, und ist ferner $\tilde{e}_{\nu, \lambda_\nu + 1}$ bzgl. $v_{\nu, \lambda_\nu + 1}$ nicht degeneriert, dann gelte $(v_{\nu, 0}, \tilde{e}_{\nu, \lambda_\nu + 1}) \in \tilde{\mathcal{E}}_L$.
- Ist $v_\nu \in V_I$ ein nicht singulärer Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, dann sei $l_\nu \in \{1, \dots, n_\nu - 2\}$ so gegeben, dass e_{ν, l_ν} bzgl. v_ν nicht degeneriert ist, und es gelte $(v_\nu, e_{\nu, l_\nu}) \in \tilde{\mathcal{E}}_L$.
- Sei $v_\nu \in V_I$ ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, $\nu \geq 1$. Ist $v_{\nu, l}$, $1 \leq l \leq n_\nu - 2$, ein nicht singulärer Eckpunkt, der entweder ein Fillpunkt oder semisingulär bzgl. Δ_ν ist, dann gelte $(v_{\nu, l}, \tilde{e}_{\nu, l+1}) \in \tilde{\mathcal{E}}_L$.

Insbesondere gilt dann nach Konstruktion von $\tilde{\mathcal{E}}_L$ sowie mit Bemerkung 7.1 die folgende Aussage.

Bemerkung 7.9. *Gilt $(v, e) \in \tilde{\mathcal{E}}_L$, dann ist e bzgl. v nicht degeneriert.*

Um im Folgenden die Notation zu vereinfachen, setzen wir für $q \geq 0$

$$d_q := \dim \tilde{\Pi}_q = \frac{(q+1)(q+2)}{2}.$$

Konstruktion von Lagrange-Interpolationsmengen:

Nach Definition gilt $\Delta_0 = T^{[1, n_1]}$. Die Menge \mathcal{L}_0 enthalte die folgenden Punkte:

(7.21) die Eckpunkte $v_1, v_{1,0}, v_{1, n_1-1}$,

(7.22) $(q-1)$ verschiedene Punkte im Inneren jeder Kante von $T^{[1, n_1]}$,

(7.23) d_{q-3} verschiedene Punkte $z_{1, n_1}^{(1)}, \dots, z_{1, n_1}^{(d_{q-3})}$ im Inneren von $T^{[1, n_1]}$, welche eindeutige Lagrange-Interpolation mit $\tilde{\Pi}_{q-3}$ zulassen. (Wir wählen beispielsweise $(q-2)$ parallele Geraden L_i in $T^{[1, n_1]}$ und i verschiedene Punkte auf jeder Geraden L_i , $i = 1, \dots, q-2$.)

Für $\nu \geq 1$ wählen wir die Menge \mathcal{L}_ν wie folgt. Ist $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ und $\lambda_\nu \geq 1$, dann definieren wir

$$c_{\nu, l} := \begin{cases} 0, & \text{falls } (v_{\nu, l-1}, \tilde{e}_{\nu, l}) \notin \tilde{\mathcal{E}}_L \text{ gilt,} \\ 1, & \text{falls } (v_{\nu, l-1}, \tilde{e}_{\nu, l}) \in \tilde{\mathcal{E}}_L \text{ gilt,} \end{cases} \quad l = 1, \dots, \lambda_\nu,$$

$$c_{\nu, \lambda_\nu + 1} := \begin{cases} 1, & \text{falls } (v_{\nu, \lambda_\nu}, \tilde{e}_{\nu, \lambda_\nu + 1}) \notin \tilde{\mathcal{E}}_L \text{ und } (v_{\nu, \lambda_\nu + 1}, \tilde{e}_{\nu, \lambda_\nu + 1}) \notin \tilde{\mathcal{E}}_L \text{ gilt,} \\ 2, & \text{falls entweder } (v_{\nu, \lambda_\nu}, \tilde{e}_{\nu, \lambda_\nu + 1}) \in \tilde{\mathcal{E}}_L \text{ oder } (v_{\nu, \lambda_\nu + 1}, \tilde{e}_{\nu, \lambda_\nu + 1}) \in \tilde{\mathcal{E}}_L \text{ gilt,} \\ 3, & \text{falls } (v_{\nu, \lambda_\nu}, \tilde{e}_{\nu, \lambda_\nu + 1}) \in \tilde{\mathcal{E}}_L \text{ und } (v_{\nu, \lambda_\nu + 1}, \tilde{e}_{\nu, \lambda_\nu + 1}) \in \tilde{\mathcal{E}}_L \text{ gilt.} \end{cases}$$

Dann enthalte \mathcal{L}_ν die folgenden Punkte:

(7.24) die Eckpunkte $v_{\nu,l}$ für $1 \leq l \leq \lambda_\nu$,

(7.25) $(q-2)$ verschiedene Punkte $w_{\nu,l}^{(1)}, \dots, w_{\nu,l}^{(q-2)}$ im Inneren von $e_{\nu,l}$, falls $(v_\nu, e_{\nu,l}) \notin \tilde{\mathcal{E}}_L$ gilt, bzw. $(q-3)$ Punkte $w_{\nu,l}^{(1)}, \dots, w_{\nu,l}^{(q-3)}$ im Inneren von $e_{\nu,l}$, falls $(v_\nu, e_{\nu,l}) \in \tilde{\mathcal{E}}_L$ gilt, für $1 \leq l \leq \lambda_\nu$,

(7.26) $(q-2-c_{\nu,l})$ verschiedene Punkte $\tilde{w}_{\nu,l}^{(1)}, \dots, \tilde{w}_{\nu,l}^{(q-2-c_{\nu,l})}$ im Inneren der Kante $\tilde{e}_{\nu,l}$ für $l = 1, \dots, \lambda_\nu + 1$,

(7.27) d_{q-4} verschiedene Punkte $z_{\nu,l}^{(1)}, \dots, z_{\nu,l}^{(d_{q-4})}$ im Inneren von $T^{[\nu,l]}$, welche eindeutige Lagrange-Interpolation mit $\tilde{\Pi}_{q-4}$ zulassen, für $l = 1, \dots, \lambda_\nu$, und d_{q-5} verschiedene Punkte $z_{\nu,\lambda_\nu+1}^{(1)}, \dots, z_{\nu,\lambda_\nu+1}^{(d_{q-5})}$ im Inneren von $T^{[\nu,\lambda_\nu+1]}$, welche eindeutige Lagrange-Interpolation mit $\tilde{\Pi}_{q-5}$ zulassen.

Ist v_ν , $\nu \geq 1$, ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, dann enthalte \mathcal{L}_ν

(7.28) den Eckpunkt v_ν ,

(7.29) $(q-2)$ verschiedene Punkte $w_{\nu,l}^{(1)}, \dots, w_{\nu,l}^{(q-2)}$ im Inneren von $e_{\nu,l}$ für $l = 0, n_\nu - 1$ und

(7.30) d_{q-4} verschiedene Punkte $z_{\nu,n_\nu}^{(1)}, \dots, z_{\nu,n_\nu}^{(d_{q-3})}$ im Inneren von $T^{[\nu,n_\nu]}$, welche eindeutige Lagrange-Interpolation mit $\tilde{\Pi}_{q-4}$ zulassen.

Gilt $v_\nu \in V_I$, dann enthalte \mathcal{L}_ν ferner die Punkte (7.24) bis (7.27), wobei $\lambda_\nu = n_\nu - 2$ gelte.

Wir definieren $\mathcal{L} := \cup_{\nu=0}^n \mathcal{L}_\nu$.

Theorem 7.10. *Sei $q \geq 5$. Dann ist \mathcal{L} eine Lagrange-Interpolationsmenge für $S_q^1(\Delta)$.*

Beweis. Sei $q \geq 5$ und sei $s \in S_q^1(\Delta)$. Es gelte $s(z) = 0$ für alle $z \in \mathcal{L}$. Wir zeigen im Folgenden, dass gilt:

$$s(z) = 0, \quad z \in \cup_{\mu=0}^\nu \mathcal{L}_\mu \quad \Rightarrow \quad s|_{\Omega_\nu} \equiv 0, \quad \nu = 0, \dots, n. \quad (7.28)$$

Beweis von (7.28) durch Induktion nach ν .

Induktionsanfang $\nu = 0$. Es ist zu zeigen, dass $s(z) = 0$ für alle $z \in T^{[1,n_1]}$ gilt. Sei $e \in \{e_{1,0}, e_{1,n_1-1}, \tilde{e}_{1,n_1}\}$. Dann gilt $s|_e \in \Pi_q$ und nach Voraussetzung verschwindet $s|_e$ auf $(q+1)$ verschiedenen Punkten von e . Es folgt direkt $s(z) = 0$, $z \in e_{1,0} \cup e_{1,n_1-1} \cup \tilde{e}_{1,n_1}$. Somit gilt

$$s|_{T^{[1,n_1]}}(z) \equiv l_1(z) l_2(z) l_3(z) p(z),$$

wobei $l_i(z) = 0$, $i = 1, 2, 3$, die Gleichung für die Gerade ist, welche die Kante $e_{1,0}$, e_{1,n_1-1} bzw. \tilde{e}_{1,n_1} enthält, und $p(z)$ ein Polynom aus $\tilde{\Pi}_{q-3}$ ist. Dann gilt

$$p(z_{1,n_1}^{(1)}) = \dots = p(z_{1,n_1}^{(d_{q-3})}) = 0$$

und somit $p(z) \equiv 0$, d. h. es gilt $s(z) = 0$, $z \in T^{[1,n_1]}$.

Induktionsschritt $\nu - 1 \rightarrow \nu$. Die Behauptung (7.28) sei für $\nu - 1$ bereits bewiesen. Sei $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$. Nach Induktionsannahme gilt $s|_{\Omega_{\nu-1}} \equiv 0$. Wir erhalten somit

$$s(z) = \frac{\partial s}{\partial x}(z) = \frac{\partial s}{\partial y}(z) = 0, \quad z \in e_{\nu,0} \cup e_{\nu,\lambda_\nu+1}.$$

Gilt $(v_{\nu,0}, \tilde{e}_{\nu,1}) \in \tilde{\mathcal{E}}_L$ oder gilt $(v_{\nu,\lambda_\nu+1}, \tilde{e}_{\nu,\lambda_\nu+1}) \in \tilde{\mathcal{E}}_L$, dann erhalten wir analog zum Beweis von Theorem 7.7 mit Bemerkung 7.9 und mit den Beziehungen (2.7) zwischen den partiellen Ableitungen und den Bézier-Koeffizienten von $p^{[\nu,l]} = s|_{T^{[\nu,l]}} \in \Pi_q$, $l = 1, \lambda_\nu + 1$, dass

$$\frac{\partial^\rho p^{[\nu,1]}}{\partial \rho \tilde{e}_{\nu,1}}(v_{\nu,0}) = 0, \quad \rho = 0, 1, 2, \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^\rho p^{[\nu,\lambda_\nu+1]}}{\partial \rho \tilde{e}_{\nu,\lambda_\nu+1}}(v_{\nu,\lambda_\nu+1}) = 0, \quad \rho = 0, 1, 2, \quad (7.29)$$

gilt. Wir betrachten nun zunächst den Fall $\lambda_\nu = 0$. Dann gilt für $\tilde{q}_{\nu,1} = s|_{\tilde{e}_{\nu,1}} \in \Pi_q$

$$\tilde{q}_{\nu,1}(v_{\nu,0}) = \tilde{q}'_{\nu,1}(v_{\nu,0}) = \tilde{q}_{\nu,1}(\tilde{w}_{\nu,1}^{(1)}) = \dots = \tilde{q}_{\nu,1}(\tilde{w}_{\nu,1}^{(q-2-c_{\nu,1})}) = \tilde{q}_{\nu,1}(v_{\nu,1}) = \tilde{q}'_{\nu,1}(v_{\nu,1})$$

sowie $\tilde{q}''_{\nu,1}(v_{\nu,0}) = 0$, falls $(v_{\nu,0}, \tilde{e}_{\nu,1}) \in \tilde{\mathcal{E}}_L$ gilt, und $\tilde{q}''_{\nu,1}(v_{\nu,1}) = 0$, falls $(v_{\nu,1}, \tilde{e}_{\nu,1}) \in \tilde{\mathcal{E}}_L$ gilt. Wir erhalten somit $s(z) = 0$, $z \in \tilde{e}_{\nu,1}$. Dann folgt

$$s|_{T^{[\nu,1]}}(z) \equiv (l_1(z))^2 (l_2(z))^2 l_3(z) p(z),$$

wobei $l_i(z) = 0$, $i = 1, 2, 3$, die Gleichung für die Gerade ist, welche die Kante $e_{\nu,0}$, $e_{\nu,1}$ bzw. $\tilde{e}_{\nu,1}$ enthält, und $p(z)$ ein Polynom aus $\tilde{\Pi}_{q-5}$ ist. Es gilt

$$p(z_{\nu,1}^{(1)}) = \dots = p(z_{\nu,1}^{(d_{q-5})}) = 0$$

und somit $p(z) \equiv 0$, d. h. es gilt $s(z) = 0$, $z \in T^{[\nu,1]}$.

Sei nun $\lambda_\nu \geq 1$. Wir zeigen zunächst, dass $s(z) = 0$, $z \in e_{\nu,1} \cup \dots \cup e_{\nu,\lambda_\nu}$, gilt. Ist v_ν bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ nicht semisingulär, dann existiert nach Konstruktion genau ein $l_\nu \in \{1, \dots, \lambda_\nu\}$, so dass $(v_\nu, e_{\nu,l_\nu}) \in \tilde{\mathcal{E}}_L$ gilt. Gilt für $l \in \{1, \dots, \lambda_\nu\}$ $(v_\nu, e_{\nu,l}) \notin \tilde{\mathcal{E}}_L$, dann folgt für $q_{\nu,l} = s|_{e_{\nu,l}} \in \Pi_q$

$$q_{\nu,l}(v_\nu) = q'_{\nu,l}(v_\nu) = q_{\nu,l}(w_{\nu,l}^{(1)}) = \dots = q_{\nu,l}(w_{\nu,l}^{(q-2)}) = q_{\nu,l}(v_{\nu,l}),$$

und wir erhalten $s(z) = 0$, $z \in e_{\nu,l}$. Ist v_ν semisingulär bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, dann folgt damit bereits $s(z) = 0$ für alle $z \in e_{\nu,1} \cup \dots \cup e_{\nu,\lambda_\nu}$. Ist v_ν nicht semisingulär bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, dann erhalten wir $s(z) = 0$ für alle $z \in e_{\nu,l}$, $l = 1, \dots, \lambda_\nu$, $l \neq l_\nu$. Insbesondere gilt dann

$$\frac{\partial^\rho p^{[\nu,l]}}{\partial \rho e_{\nu,l}}(v_\nu) = 0, \quad \rho = 0, 1, 2, \quad l = 1, \dots, \lambda_\nu, \quad l \neq l_\nu.$$

Mit den C^1 -Stetigkeitsbedingungen an den Kanten $e_{\nu,1}, \dots, e_{\nu,\lambda_\nu}$ erhalten wir

$$D^\omega p^{[\nu,l]}(v_\nu) = 0, \quad \omega = 0, 1, 2, \quad l = 1, \dots, \lambda_\nu.$$

Somit folgt für $q_{\nu,l_\nu} = s|_{e_{\nu,l_\nu}} \in \Pi_q$

$$q_{\nu,l_\nu}(v_\nu) = q'_{\nu,l_\nu}(v_\nu) = q''_{\nu,l_\nu}(v_\nu) = q_{\nu,l_\nu}(w_{\nu,l_\nu}^{(1)}) = \dots = q_{\nu,l_\nu}(w_{\nu,l_\nu}^{(q-3)}) = q_{\nu,l_\nu}(v_{\nu,l_\nu}),$$

und wir erhalten ferner $s(z) = 0$, $z \in e_{\nu,l_\nu}$.

Wir betrachten nun $T^{[\nu,1]}$. Sei $\tilde{q}_{\nu,1} = s|_{\tilde{e}_{\nu,1}} \in \Pi_q$. Ist $(v_{\nu,0}, \tilde{e}_{\nu,1}) \notin \tilde{\mathcal{E}}_L$, dann gilt nach Definition von \mathcal{L}_ν

$$\tilde{q}_{\nu,1}(v_{\nu,0}) = \tilde{q}'_{\nu,1}(v_{\nu,0}) = \tilde{q}_{\nu,1}(\tilde{w}_{\nu,1}^{(1)}) = \dots = \tilde{q}_{\nu,1}(\tilde{w}_{\nu,1}^{(q-2)}) = \tilde{q}_{\nu,1}(v_{\nu,1})$$

und somit folgt $s(z) = 0$, $z \in \tilde{e}_{\nu,1}$. Anderenfalls erhalten wir mit (7.29)

$$\tilde{q}_{\nu,1}(v_{\nu,0}) = \tilde{q}'_{\nu,1}(v_{\nu,0}) = \tilde{q}''_{\nu,1}(v_{\nu,0}) = \tilde{q}_{\nu,1}(\tilde{w}_{\nu,1}^{(1)}) = \dots = \tilde{q}_{\nu,1}(\tilde{w}_{\nu,1}^{(q-3)}) = \tilde{q}_{\nu,1}(v_{\nu,1}),$$

so dass wir ebenfalls $s(z) = 0$, $z \in \tilde{e}_{\nu,1}$, erhalten. Dann gilt

$$s|_{T^{[\nu,1]}}(z) \equiv (l_1(z))^2 l_2(z) l_3(z) p(z),$$

wobei $l_i(z) = 0$, $i = 1, 2, 3$, die Gleichung für die Gerade ist, welche die Kante $e_{\nu,0}$, $e_{\nu,1}$ bzw. $\tilde{e}_{\nu,1}$ enthält, und ferner $p(z)$ ein Polynom aus $\tilde{\Pi}_{q-4}$ ist. Es gilt

$$p(z_{\nu,1}^{(1)}) = \dots = p(z_{\nu,1}^{(d_q-4)}) = 0$$

und somit $p(z) \equiv 0$. Damit folgt direkt $s(z) = 0$, $z \in T^{[\nu,1]}$. Für $2 \leq l \leq \lambda_\nu$ folgt analog zum Fall $l = 1$, dass $s(z) = 0$ für alle $z \in T^{[\nu,l]}$ gilt. Schließlich lässt sich analog zum Fall $\lambda_\nu = 0$ zeigen, dass ferner $s(z) = 0$ für alle $z \in T^{[\nu,\lambda_\nu+1]}$ gilt. Dies beweist (7.28) für den Fall, dass $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ gilt.

Sei nun v_ν ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$. Nach Induktionsannahme gilt $s|_{\Omega_{\nu-1}} = 0$, so dass wir mit den C^1 -Stetigkeitsbedingungen an der Kante \tilde{e}_{ν,n_ν}

$$s(z) = \frac{\partial s}{\partial x}(z) = \frac{\partial s}{\partial y}(z) = 0, \quad z \in \tilde{e}_{\nu,n_\nu},$$

erhalten. Nach Definition von \mathcal{L}_ν gilt dann für $q_{\nu,l} = s|_{e_{\nu,l}} \in \Pi_q$, $l = 0, n_\nu - 1$,

$$q_{\nu,l}(v_\nu) = q_{\nu,l}(w_{\nu,l}^{(1)}) = \dots = q_{\nu,l}(w_{\nu,l}^{(q-2)}) = q_{\nu,l}(v_{\nu,l}) = q'_{\nu,l}(v_{\nu,l}),$$

so dass wir direkt $s(z) = 0$, $z \in e_{\nu,0} \cup e_{\nu,n_\nu-1}$, erhalten. Demnach gilt

$$s|_{T^{[\nu,\nu]}}(z) \equiv l_1(z) l_2(z) (l_3(z))^2 p(z),$$

wobei $l_i(z) = 0$, $i = 1, 2, 3$, die Gleichung für die Gerade ist, welche die Kante $e_{\nu,0}$, $e_{\nu,n_\nu-1}$ bzw. \tilde{e}_{ν,n_ν} enthält, und ferner $p(z)$ ein Polynom aus $\tilde{\Pi}_{q-4}$ ist. Es gilt

$$p(z_{\nu,n_\nu}^{(1)}) = \dots = p(z_{\nu,n_\nu}^{(d_{q-4})}) = 0$$

und somit $p(z) \equiv 0$. Damit folgt direkt $s(z) = 0$, $z \in T^{[\nu,n_\nu]}$. Ist $v_\nu \in V_B$ dann folgt dann bereits die Behauptung. Ist $v_\nu \in V_I$, dann folgt (7.28) mit Bemerkung 7.9 analog zum Beweis für den Fall, dass $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ und $\lambda_\nu \geq 1$ gilt. \square

Somit bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{L} = \dim S_q^1(\Delta)$ gilt. Wir zeigen im Folgenden, dass für $\nu = 1, \dots, n$ gilt:

$$\begin{aligned} |\cup_{\mu=0}^\nu \mathcal{L}_\mu| &= \frac{(q+1)(q+2)}{2} + |E_I^{(\nu)}| \frac{q(q-1)}{2} - |V_I^{(\nu)}| \left(\frac{(q+1)(q+2)}{2} - 3 \right) \\ &\quad - \sum_{\substack{\mu=1, \dots, \nu \\ v_\mu \notin V_B}}^{\lambda_\mu+1} \left(\sum_{l=1}^{\lambda_\mu+1} c_{\mu,l} \right) + |\tilde{V}^{(\nu)}| + S^{(\nu)}, \end{aligned} \quad (7.30)$$

wobei $\tilde{V}^{(\nu)}$ die Menge der nicht singulären Eckpunkte v_μ , $2 \leq \mu \leq \nu$, bezeichnet, die entweder ein Fillpunkt oder semisingulär bzgl. $\Delta_{\mu-1}$ sind. Nach Konstruktion gilt offensichtlich

$$\sum_{\substack{\nu=1, \dots, n \\ v_\nu \notin V_B}}^{\lambda_\nu+1} \left(\sum_{l=1}^{\lambda_\nu+1} c_{\nu,l} \right) = |\tilde{V}^{(n)}|. \quad (7.31)$$

Ist (7.30) gezeigt, dann folgt mit (7.31) wegen $\Delta_n = \Delta$ sowie mit den Theorem 2.3 bereits, dass $|\mathcal{L}| = \dim S_q^1(\Delta)$ gilt.

Beweis von (7.30) durch vollständige Induktion nach ν .

Induktionsanfang $\nu = 0$. Nach Konstruktion gilt $|\mathcal{L}_0| = d_q$. Da $|E_I^{(0)}| = |V_I^{(0)}| = S^{(0)} = |\tilde{V}^{(0)}| = 0$ gilt, folgt daraus bereits die Behauptung.

Induktionsschritt $\nu-1 \rightarrow \nu$. Die Behauptung (7.30) sei für $\nu-1$ bereits bewiesen. Ist $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$, dann gilt $|E^{(\nu)}| = |E^{(\nu-1)}| + (\lambda_\nu + 2)$, $|V^{(\nu)}| = |V^{(\nu-1)}| + 1$ und $S^{(\nu)} = S^{(\nu-1)} + \sigma_{v_\nu}$. Ferner gilt $|\tilde{V}^{(\nu)}| = |\tilde{V}^{(\nu-1)}|$, falls $v_\nu \notin \tilde{V}^{(\nu)}$ ist, bzw. $|\tilde{V}^{(\nu)}| = |\tilde{V}^{(\nu-1)}| + 1$, falls $v_\nu \in \tilde{V}^{(\nu)}$ ist. Nach Konstruktion von \mathcal{L}_ν gilt

$$|\cup_{\mu=0}^\nu \mathcal{L}_\mu| = |\cup_{\mu=0}^{\nu-1} \mathcal{L}_\mu| + (\lambda_\nu + 2) \frac{q(q-1)}{2} - \frac{(q+1)(q+2)}{2} + 3 + \sigma_{v_\nu} - \sum_{l=1}^{\lambda_\nu+1} c_{\nu,l},$$

falls $v_\nu \notin \tilde{V}^{(\nu)}$ gilt, und anderenfalls

$$|\cup_{\mu=0}^\nu \mathcal{L}_\mu| = |\cup_{\mu=0}^{\nu-1} \mathcal{L}_\mu| + \lambda_\nu \frac{q(q-1)}{2} + \frac{(q-3)(q-2)}{2} - \sum_{l=1}^{\lambda_\nu+1} c_{\nu,l},$$

so dass nach Induktionsannahme (7.30) folgt.

Ist $v_\nu \in V_I$ ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, dann folgt nach Konstruktion von Δ_ν , dass $|E^{(\nu)}| = |E^{(\nu-1)}| + (n_\nu + 1)$, $|V^{(\nu)}| = |V^{(\nu-1)}| + 1$, $S^{(\nu)} = S^{(\nu-1)} + \sigma_{v_\nu}$ und $|\tilde{V}^{(\nu)}| = |\tilde{V}^{(\nu-1)}|$ gilt.

Nach Konstruktion von \mathcal{L}_ν gilt

$$|\cup_{\mu=0}^\nu \mathcal{L}_\mu| = |\cup_{\mu=0}^{\nu-1} \mathcal{L}_\mu| + n_\nu \frac{q(q-1)}{2} + 3 + \sigma_{v_\nu} - (2q+1) - \sum_{l=1}^{\lambda_\nu+1} c_{\nu,l}.$$

Nach Induktionsannahme folgt dann (7.30).

Ist $v_\nu \in V_B$ ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, dann folgt nach Konstruktion von Δ_ν , dass $|E^{(\nu)}| = |E^{(\nu-1)}| + 1$, $|V^{(\nu)}| = |V^{(\nu-1)}|$, $S^{(\nu)} = S^{(\nu-1)}$ und $|\tilde{V}^{(\nu)}| = |\tilde{V}^{(\nu-1)}|$ gilt. Nach Konstruktion von \mathcal{A}_ν erhalten wir

$$|\cup_{\mu=0}^\nu \mathcal{L}_\mu| = |\cup_{\mu=0}^{\nu-1} \mathcal{L}_\mu| + \frac{q(q-1)}{2},$$

so dass nach Induktionsannahme (7.30) folgt. ■

Kapitel 8

Minimal bestimmende Mengen von $S_q^2(\Delta)$ auf Kegeln

Gegeben sei eine Triangulierung Δ und eine Teiltriangulierung $\tilde{\Delta}$ von Δ . Es sei v ein innerer Eckpunkt von Δ und ein Randpunkt von $\tilde{\Delta}$. Dann bezeichne K den Kegel von v bzgl. $\tilde{\Delta}$. In diesem Kapitel betrachten wir die Teiltriangulierung

$$\tilde{\Delta}_K := \tilde{\Delta} \cup K \quad (8.1)$$

und konstruieren für $q \geq 5$ allgemeine Klassen minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$, wobei wir davon ausgehen, dass $S_q^2(\tilde{\Delta})$ bereits bestimmt ist.

Im Vergleich zur vollständigen Charakterisierung der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^1(\tilde{\Delta}_K)$ handelt es sich bei der Konstruktion minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ um ein wesentlich schwierigeres Problem, da die Bézier-Koeffizienten eines C^2 -Splines in einem noch komplexeren Zusammenhang stehen. Neben Semisingularitäten treten weitere kritische geometrische Konstellationen auf, auf die wir im Folgenden näher eingehen.

Die Eckpunkte, Kanten und Dreiecke von K seien wie in Abbildung 4.1 nummeriert. Für $l = 1, \dots, \lambda+1$ setzen wir $v_1^{[l]} = v$, $v_2^{[l]} = v_l$ und $v_3^{[l]} = v_{l-1}$. Dann gilt das folgende Korollar, das unmittelbar aus den Resultaten von Alfeld, Piper & Schumaker [2] zu den minimal bestimmenden Mengen von $S_q^2(\Delta)$ auf Zellen folgt (vgl. auch Nürnberger & Zeilfelder [49]).

Korollar 8.1. *Es sei K ein Kegel mit λ inneren Kanten, $\lambda \geq 2$. Für ein $l \in \{2, \dots, \lambda\}$ seien die Kanten e_{l-2} , e_{l-1} , e_l und e_{l+1} paarweise nicht kollinear. Ferner sei $s \in S_q^2(K)$, $q \geq 5$, und es gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in D_3(v) \setminus \{P_{q-3,3,0}^{[l]}, P_{q-3,2,1}^{[l]}, P_{q-3,1,2}^{[l]}, P_{q-3,0,3}^{[l]}\}$. Dann folgt $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in D_3(v)$.*

Abbildung 8.1 veranschaulicht den Sachverhalt aus Korollar 8.1.

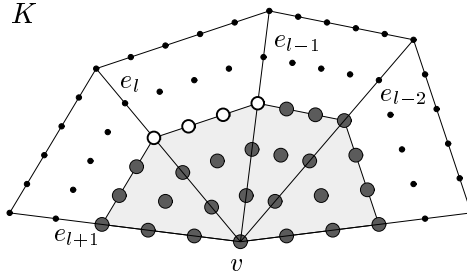


Abb. 8.1: Ist $S_q^2(K)$ auf den BB-Punkten \bullet bestimmt, dann auch auf $D_3(v)$.

Sei $S_q^2(\tilde{\Delta})$ bereits eindeutig bestimmt. Besitzt der Kegel K nicht vier aufeinander folgende Kanten mit paarweise verschiedener Steigung, die von v ausgehen, dann ist $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ auf mindestens einem BB-Punkt in $\mathcal{B}_q(K)$ überbestimmt. Wie Abbildung 8.2 zeigt, liegt dieser BB-Punkt für den Fall, dass v bzgl. $\tilde{\Delta}$ nicht semisingulär ist, in $R_3(v)$. Ist v bzgl. $\tilde{\Delta}$ semisingulär, kann dieser BB-Punkt auch in $R_4(v)$ liegen.

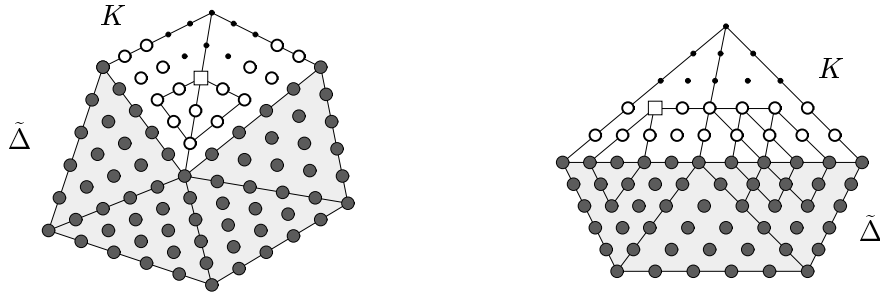


Abb. 8.2: Ist $S_q^2(\Delta)$ auf $\mathcal{B}_q(\tilde{\Delta})$ bestimmt, dann ist $S_q^2(\Delta)$ auf den BB-Punkten \circ eindeutig bestimmt, auf dem BB-Punkt \square jedoch überbestimmt.

Ein direkter Ansatz zur Vermeidung von Überbestimmtheiten besteht darin, entweder aus einer minimal bestimmenden Menge $\tilde{\mathcal{A}}$ von $S_q^2(\tilde{\Delta})$ nachträglich einen geeigneten BB-Punkt aus $D_4(v)$ zu entfernen oder bei der Wahl von $\tilde{\mathcal{A}}$ eine kritische Situation am Randpunkt v von $\tilde{\Delta}$ zu berücksichtigen. Für $q = 5$ und $q = 6$ sind jedoch schon die Scheiben der Ordnung drei für zwei benachbarte Randpunkte von $\tilde{\Delta}$ nicht disjunkt. Somit ist nicht gewährleistet, dass $\tilde{\mathcal{A}}$ einen geeigneten BB-Punkt aus $D_4(v)$ enthält, so dass $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ durch Entfernen des BB-Punkts aus $\tilde{\mathcal{A}}$ nicht mehr überbestimmt ist. In diesem Fall werden wir K modifizieren. Dazu unterteilen wir ein oder zwei geeignete Dreiecke von K durch einen so genannten *Clough-Tocher-Split*, d.h. wir fügen im Inneren eines Dreiecks $T^{[l]}$ von K einen Eckpunkt y_l hinzu und verbinden diesen mit den Eckpunkten von $T^{[l]}$ (vgl. Abb. 8.3). Besitzt K bereits drei aufeinander folgende Kanten, die paarweise nicht kollinear sind, dann genügt es offensichtlich ein Dreieck von K zu unterteilen. Ist v jedoch semisingulär, d.h. besitzt K nur zwei aufeinander folgende Kanten mit paarweise verschiedener Steigung,

dann unterteilen wir zwei benachbarte Dreiecke von K .

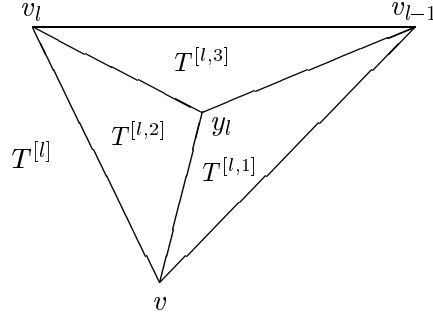


Abb. 8.3: Unterteilung von $T^{[l]}$ durch einen Clough-Tochter-Split.

Gilt $q \geq 7$ und besitzt K nicht vier aufeinander folgende Kanten mit paarweise verschiedener Steigung, wählen wir den oben beschriebenen Ansatz zur Vermeidung von Überbestimmtheiten. Wir nutzen dabei die Tatsache, dass für $q \geq 7$ die Scheiben der Ordnung drei zweier benachbarter Eckpunkte disjunkt sind. D.h. anstatt nachträglich BB-Punkte aus einer bereits gewählten minimal bestimmenden Menge von $S_q^2(\tilde{\Delta})$ aus $D_3(v)$ zu entfernen, gehen wir davon aus, dass $\tilde{\mathcal{A}}$ eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ auf $\mathcal{B}_q(\tilde{\Delta}) \cup D_3(v)$ ist. Ferner berücksichtigen wir den Fall, dass v semisingulär bzgl. $\tilde{\Delta}$ ist, indem wir einen geeigneten BB-Punkt aus $R_4(v)$ bei der Wahl der BB-Punkte von $\tilde{\mathcal{A}}$ auslassen.

Wir definieren nun für $q \geq 5$ die Mengen der BB-Punkte von K , auf denen $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ nach unserer Annahme bereits bestimmt ist. Es sei K zunächst ein Kegel mit Scheitelpunkt v und λ inneren Kanten, $\lambda \geq 2$. Für ein $l \in \{2, \dots, \lambda\}$ seien die Kanten e_{l-2} , e_{l-1} , e_l und e_{l+1} paarweise nicht kollinear. Dann definieren wir

$$R_2(K) := (D_2(v) \cap \mathcal{B}_q(K)) \cup \{P_{i,j,k}^{[1]}, P_{i,k,j}^{[\lambda+1]} : j \leq 2, i+j+k=q\}, \quad q \geq 5. \quad (8.2)$$

Ist $\tilde{\mathcal{A}}$ eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\tilde{\Delta})$, dann ist $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ durch die C^2 -Stetigkeitsbedingungen an den Randkanten von $\tilde{\Delta}$ und am Eckpunkt v offensichtlich auch auf $R_2(K)$ eindeutig bestimmt. Mit (2.10) erhalten wir direkt das folgende Korollar (vgl. Nürnberger & Zeilfelder [49]).

Korollar 8.2. *Für $q \geq 5$ gilt*

$$\dim S_q^2(\tilde{\Delta}_K) = \dim S_q^2(\tilde{\Delta}) + (\lambda + 2) \frac{(q-1)(q-2)}{2} - \frac{(q+1)(q+2)}{2} + 6.$$

Ist K ein Kegel, der nicht vier aufeinander folgende Kanten mit paarweise verschiedener Steigung besitzt, dann bezeichnen wir für $q = 5, 6$ den modifizierten Kegel mit K^* . Ist

das Dreieck $T^{[1]}$ von K in K^* nicht unterteilt, so setzen wir $l_1 := 1$. Anderenfalls gelte $l_1 := (1, 1)$. Analog definieren wir $l_{\lambda+1} := \lambda + 1$, falls $T^{[\lambda+1]}$ von K in K^* nicht unterteilt ist, bzw. anderenfalls $l_{\lambda+1} := (\lambda + 1, 2)$. Wir definieren

$$R_2(K^*) := D_2(v) \cup \{P_{i,j,k}^{[l_1]}, P_{i,k,j}^{[l_{\lambda+1}]} : j \leq 2, i + j + k = q\}, \quad q = 5, 6. \quad (8.3)$$

Für den modifizierten Kegel K^* bezeichne n_{CT} die Anzahl der Clough-Tochter-Punkte, die zu K hinzugefügt worden sind. Ist \tilde{A} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\tilde{\Delta})$, so gilt wie schon im Fall nicht modifizierter Kegel, dass $S_q^2(\tilde{\Delta}_{K^*})$ durch \tilde{A} auch auf $R_2(K^*)$ eindeutig bestimmt ist. Wir erhalten das folgende Korollar (vgl. Nürnberger & Zeilfelder [49]).

Korollar 8.3. *Für $q \geq 5$ gilt*

$$\begin{aligned} \dim S_q^2(\tilde{\Delta}_{K^*}) &= \dim S_q^2(\tilde{\Delta}) + (\lambda + 2 + 3n_{\text{CT}}) \frac{(q-1)(q-2)}{2} \\ &\quad - (n_{\text{CT}} + 1) \left(\frac{(q+1)(q+2)}{2} - 6 \right) + n_{\text{CT}}. \end{aligned}$$

Sei nun $q \geq 7$ und K ein beliebiger Kegel mit Scheitelpunkt v und λ inneren Kanten, $\lambda \geq 1$. Es bezeichne d_v die Anzahl der inneren Kanten von K , die bzgl. v degeneriert sind. Gilt $d_v > \lambda$ oder $d_v = \lambda = 1$, dann definieren wir

$$\begin{aligned} R_{2,3}(K) &:= (\mathcal{B}_q(K) \cap (D_3(v) \cup D_3(v_0) \cup D_3(v_{\lambda+1}))) \\ &\quad \cup \{P_{i,j,k}^{[1]}, P_{i,k,j}^{[\lambda+1]} : j \leq 2, i + j + k = q\}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Für $d_v = \lambda = 2$ gelte

$$\begin{aligned} R_{2,3}(K) &:= (\mathcal{B}_q(K) \cap (D_3(v) \cup D_3(v_0) \cup D_3(v_3))) \\ &\quad \cup \{P_{i,j,k}^{[1]}, P_{i,k,j}^{[3]} : j \leq 2, i + j + k = q\} \cup \{P_{q-4,2,2}^{[2]}\}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Nach Voraussetzung ist $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ für $q = 5, 6$ und für $q \geq 7$ bereits auf $S_q^2(\tilde{\Delta})$ sowie auf der Menge $R_2(K)$ bzw. auf der Menge $R_{2,3}(K)$ bestimmt. Definieren wir \mathcal{M} wie schon im Fall $r = 1$ als die Menge der BB-Punkte von K , die in keiner C^2 -Menge von v liegen, dann sind bei der Wahl einer minimal bestimmenden Menge von $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ insbesondere die Mengen $D_3(v)$ und $C_{l,p}^2(v)$, $p = 4, \dots, q$, $l = 1, \dots, \lambda$, oder $D_4(v)$ und $C_{l,p}^2(v)$, $p = 5, \dots, q$, $l = 1, \dots, \lambda$, von Interesse. Für einen modifizierten Kegel K^* im Fall $q = 5, 6$ spielen ferner die Scheiben um die Eckpunkte y_l eine Rolle. In Abschnitt 8.1 konstruieren wir für $q \geq 5$ große Klassen (minimal) bestimmender Mengen von $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ auf den oben genannten Teilmengen von $\mathcal{B}_q(K)$. Aufbauend auf diesen Ergebnissen konstruieren wir in Abschnitt 8.2 für $q = 5, 6$ minimal bestimmende Mengen von $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$, wobei K entweder ein Kegel mit mindestens vier aufeinander folgenden Kanten mit paarweise verschiedener Steigung ist oder ein Kegel ist, bei dem ein oder zwei Dreiecke durch einen Clough-Tochter Split unterteilt sind. Anschließend konstruieren wir in Abschnitt 8.3 für $q \geq 7$ allgemeine Klassen minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(K)$ auf beliebigen Kegeln, wobei wir voraussetzen, dass $S_q^2(K)$ bereits auf $R_{2,3}(K)$ bestimmt ist.

8.1 Minimal bestimmende Mengen von $S_q^2(\Delta)$ auf Teilmengen von $\mathcal{B}_q(K)$

Es sei $\tilde{\Delta}_K \subset \Delta$ wie in (8.1) gegeben. Dabei bezeichne K einen Kegel mit dem Scheitelpunkt v und λ inneren Kanten, $\lambda \geq 1$. Wir konstruieren im Folgenden für $q \geq 5$ Klassen (minimal) bestimmender Mengen von $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ auf den Scheiben $D_p(v)$, $p = 3, 4$, und auf der Vereinigung von BB-Punkten, die durch C^2 -Stetigkeitsbedingungen an einer inneren Kante von K miteinander in einer Beziehung stehen. Für $q = 5, 6$ konstruieren wir ferner für einen modifizierten Kegel K^* minimal bestimmende Mengen von $S_q^2(\tilde{\Delta}_{K^*})$ auf den Scheiben des inneren Eckpunkts eines Clough-Tochter-Dreiecks, wobei $\tilde{\Delta}_{K^*}$ wie in (8.1) gegeben ist.

Analog zum Konzept der C^1 -Mengen definieren wir auf der Menge $\mathcal{B}_q(K)$ C^2 -Mengen des Scheitelpunkts v bzgl. einer inneren Kante von K .

Definition 8.4. Es sei K ein Kegel mit dem Scheitelpunkt v und λ inneren Kanten e_1, \dots, e_λ . Für $l \in \{1, \dots, \lambda\}$ seien die C^1 -Mengen von v bzgl. der Kante $e_l = [v, v_l]$ wie in Definition 4.3 gegeben. Für $p = 2, \dots, q$ bezeichnen wir $C_{l,p}^2(v)$ als C^2 -Menge von v bzgl. e_l . Ist e_l nicht degeneriert, dann gelte

$$C_{l,p}^2(v) := C_{l,p}^1(v) \cup C_{l,p-1}^1(v) \cup \{P_{q-p,p-2,2}^{[l]}, P_{q-p,2,p-2}^{[l+1]}\}.$$

Ist die Kante e_l bzgl. v degeneriert, gelte

$$C_{l,p}^2(v) := C_{l,p-1}^1(v) \cup \{P_{q-p,p-2,2}^{[l]}, P_{q-p,2,p-2}^{[l+1]}\}.$$

Ist e_l bzgl. des Eckpunkts v_l degeneriert, dann gelte

$$C_{l,p}^2(v) := C_{l,p}^1(v) \cup \{P_{q-p,p-2,2}^{[l]}, P_{q-p,2,p-2}^{[l+1]}\}.$$

Eine C^2 -Menge $C_{l,p}^2(v)$ heißt *degeneriert*, falls e_l degeneriert ist, anderenfalls nennen wir $C_{l,p}^2(v)$ *nicht degeneriert*.

Das folgende Lemma liefert eine Charakterisierung der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^2(\Delta)$ auf einer nicht degenerierten C^2 -Menge $C_{l,p}^2(v)$, $p \in \{2, \dots, q\}$, $l \in \{1, \dots, \lambda\}$. Dabei seien die BB-Punkte von $C_{l,p}^2(v)$ wie in Abbildung 8.4 mit P_ν , $\nu = 1, \dots, 9$, nummeriert.

Lemma 8.5. \mathcal{A} ist genau dann eine bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta)$ auf $C_{l,p}^2(v)$, wenn \mathcal{A} die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$(i) \quad |\mathcal{A}| = 6,$$

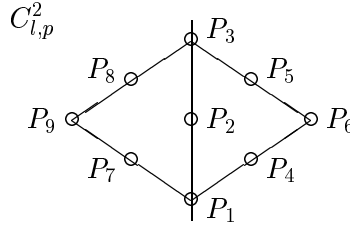


Abb. 8.4: Bezeichnung der BB-Punkte in $C_{l,p}^2$

- (ii) $C_{l,p-1}^1(v) \not\subseteq \mathcal{A}$ und $C_{l,p}^1(v) \not\subseteq \mathcal{A}$,
- (iii) $\mathcal{A} \neq \{P_1, P_3, P_5, P_6, P_7, P_9\}$,
- (iv) $\mathcal{A} \neq \{P_1, P_3, P_4, P_6, P_8, P_9\}$,
- (v) $\mathcal{A} \neq \{P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9\}$.

Beweis. Sei $\mathcal{A} \subset C_{l,p}^2(v)$ und es gelte $|\mathcal{A} \cap C_{l,p}^2(v)| = 6$. Ferner sei $s \in S_q^2(\Delta)$ und es gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}$. Zu zeigen ist $\lambda_{P_\nu} s = 0$, $P \in \{P_1, \dots, P_9\}$. Wir setzen $a_\nu := \lambda_{P_\nu} s$, $\nu = 1, \dots, 9$. Dann folgt die Behauptung direkt aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen

$$\begin{aligned} a_7 &= \varphi_1 a_1 + \varphi_2 a_2 + \varphi_3 a_4 \\ a_8 &= \varphi_1 a_2 + \varphi_2 a_3 + \varphi_3 a_5 \\ a_9 &= \varphi_1^2 a_1 + 2 \varphi_1 \varphi_2 a_2 + \varphi_2^3 a_3 + 2 \varphi_1 \varphi_3 a_4 + 2 \varphi_2 \varphi_3 a_5 + \varphi_3^2 a_6 \end{aligned}$$

wobei $\varphi_i := \phi_i(v_{l+1})$ die i -te baryzentrische Koordinate von v_{l+1} bzgl. $T^{[l]}$ bezeichnet, $i = 1, 2, 3$. ■

Das folgende Korollar liefert eine Charakterisierung der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^2(K)$ auf einer degenerierten C^2 -Menge $C_{l,p}^2(v)$, $p \in \{2, \dots, q\}$, $l \in \{1, \dots, \lambda\}$.

Korollar 8.6. \mathcal{A} ist genau dann eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta)$ auf $C_{l,p}^2(v)$, wenn \mathcal{A} die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) $|\mathcal{A}| = 3$,
- (ii) $\mathcal{A} \not\subseteq C_{l,p-1}^1(v)$ und $\mathcal{A} \not\subseteq C_{l,p}^1(v)$.

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus der C^1 - und der C^2 -Stetigkeitsbedingung auf den BB-Punkten von $C_{l,p}^2(v)$. ■

Wie oben bereits erwähnt, unterteilen wir für $q = 5, 6$ ein oder zwei Dreiecke von K durch einen Clough-Tochter-Split, falls K nicht vier Kanten mit paarweise verschiedener Steigung besitzt. Wird das Dreieck $T^{[l]}$ von K unterteilt, setzen wir $T^{[l,1]} = \Delta(v, y_l, v_{l-1})$,

$T^{[l,2]} = \Delta(v, v_l, y_l)$ und $T^{[l,3]} = \Delta(y_l, v_l, v_{l-1})$, wobei, wie in Abbildung 8.5 dargestellt, $v = v_1^{[l,1]} = v_1^{[l,2]}$, $v_l = v_2^{[l,2]} = v_2^{[l,3]}$, $v_{l-1} = v_3^{[l,1]} = v_3^{[l,3]}$ und $y_l = v_2^{[l,1]} = v_3^{[l,2]} = v_1^{[l,3]}$ gelte. Ferner setzen wir $e_{l,\mu} := [y_l, v_\mu^{[l,\mu]}]$.

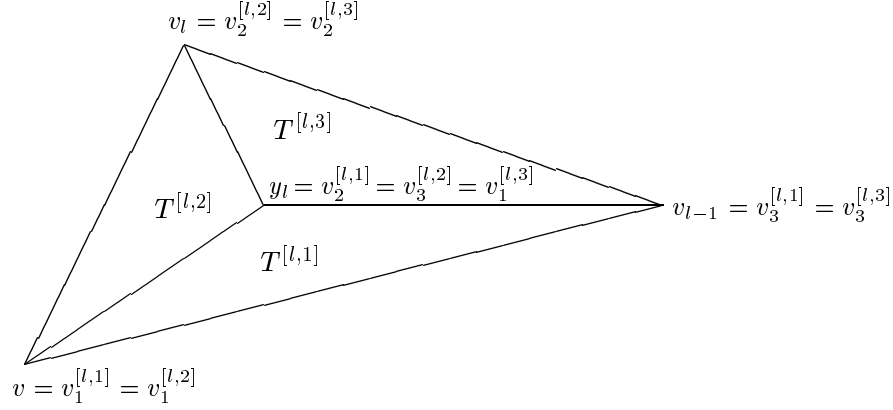


Abb. 8.5: Bezeichnung der Eckpunkte und Dreiecke des Clough-Tocher-Dreiecks $\cup_{\mu=1}^3 T^{[l,\mu]}$.

Offensichtlich besteht die Standardzelle Δ_{y_l} von y_l genau aus den Dreiecken $T^{[l,1]}$, $T^{[l,2]}$ und $T^{[l,3]}$. Mit Theorem 2.6 erhalten wir somit

$$\dim S_q^2(\Delta_{y_l}) = 3 \frac{(q-1)(q-2)}{2} + 7, \quad q \geq 2. \quad (8.6)$$

Im Folgenden wählen wir bei einem Clough-Tocher-Split von $T^{[l]}$ stets den Schwerpunkt von $T^{[l]}$ als inneren Eckpunkt y_l . Somit haben die Dreiecke $T^{[l,\mu]}$, $\mu = 1, 2, 3$, alle den gleichen Flächeninhalt. Die baryzentrischen Koordinaten $\phi_i^{[l,\mu]}(v_{l,\mu+1})$ bzgl. $T^{[l,\mu]}$ (hierbei gelte $v_{l,4} = v_{l,1}$) lassen sich als Verhältnisse von Flächeninhalten von Dreiecken interpretieren. Die Annahme, dass y_l der Schwerpunkt von $T^{[l]}$ ist, hat somit den Vorteil, dass wir $\phi_i^{[l,\mu]}(v_{l,\mu+1})$ unabhängig von der Größe und der Form des Dreiecks $T^{[l]}$ direkt angeben können. Es gilt

$$\begin{aligned} \phi_1^{[l,1]}(v_{l,2}) &= -\frac{\text{area } T^{[l,3]}}{\text{area } T^{[l,1]}} = -1, & \phi_2^{[l,1]}(v_{l,2}) &= \frac{\text{area } T^{[l]}}{\text{area } T^{[l,1]}} = 3, \\ \phi_3^{[l,1]}(v_{l,2}) &= -\frac{\text{area } T^{[l,2]}}{\text{area } T^{[l,1]}} = -1, \end{aligned}$$

wobei $\text{area } T$ den Flächeninhalt von T bezeichne. Analog gilt

$$\begin{aligned} \phi_1^{[l,2]}(v_{l,3}) &= -1, & \phi_2^{[l,2]}(v_{l,3}) &= -1, & \phi_3^{[l,2]}(v_{l,3}) &= 3, \\ \phi_1^{[l,3]}(v_{l,1}) &= 3, & \phi_2^{[l,3]}(v_{l,1}) &= -1, & \phi_3^{[l,3]}(v_{l,1}) &= -1. \end{aligned}$$

Wir definieren nun analog zu den C^1 - und C^2 -Mengen von v bzgl. einer inneren Kante von K die C^1 - und C^2 -Mengen von y_l bzgl. der Kanten $e_{l,\mu}$, $\mu = 1, 2, 3$.

Definition 8.7. Für $\mu = 1, 2, 3$ und $p = 1, \dots, q$ bezeichnen wir die Menge $C_{(l,\mu),p}^1(y_l)$ als C^1 -Menge von y_l bzgl. $e_{l,\mu}$. Dabei ist $C_{(l,\mu),p}^1(y_l)$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} C_{(l,1),p}^1(y_l) &:= \{P_{p-1,q-p+1,0}^{[l,1]}, P_{p,q-p,0}^{[l,1]}, P_{p-1,q-p,1}^{[l,1]}, P_{p-1,1,q-p}^{[l,2]}\}, \\ C_{(l,2),p}^1(y_l) &:= \{P_{0,p-1,q-p+1}^{[l,2]}, P_{0,p,q-p}^{[l,2]}, P_{1,p-1,q-p}^{[l,2]}, P_{q-p,p-1,1}^{[l,3]}\}, \\ C_{(l,3),p}^1(y_l) &:= \{P_{q-p+1,0,p-1}^{[l,3]}, P_{q-p,0,p}^{[l,3]}, P_{q-p,1,p-1}^{[l,3]}, P_{1,q-p,p-1}^{[l,1]}\}. \end{aligned}$$

Ferner bezeichnen wir für $\mu = 1, 2, 3$ und $p = 2, \dots, q$ die Menge $C_{(l,\mu),p}^2(y_l)$ als C^2 -Menge von y_l bzgl. $e_{l,\mu}$. Dabei ist $C_{(l,\mu),p}^2(y_l)$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} C_{(l,1),p}^2(y_l) &:= C_{(l,1),p}^1(y) \cup C_{(l,1),p-1}^1(y) \cup \{P_{p-2,q-p,2}^{[l,1]}, P_{p-2,2,q-p}^{[l,2]}\}, \\ C_{(l,2),p}^2(y_l) &:= C_{(l,2),p}^1(y) \cup C_{(l,2),p-1}^1(y) \cup \{P_{2,p-2,q-p}^{[l,2]}, P_{q-p,p-2,2}^{[l,3]}\}, \\ C_{(l,3),p}^2(y_l) &:= C_{(l,3),p}^1(y) \cup C_{(l,3),p-1}^1(y) \cup \{P_{q-p,2,p-2}^{[l,3]}, P_{2,q-p,p-2}^{[l,1]}\}. \end{aligned}$$

8.1.1 C^2 -Mengen um einen Eckpunkt

Es sei $\tilde{\Delta}_K$ wie in (8.1) gegeben. Dabei sei K ein Kegel, der mindestens vier aufeinander folgende Kanten besitzt, die von v ausgehen und paarweise nicht kollinear sind. Bezeichnen wir die Anzahl der inneren Kanten von K mit λ , gilt somit $\lambda \geq 2$. Wir definieren

$$D_3^*(v) := D_3(v) \setminus \{P_{q-3,3,0}^{[l]} : 1 \leq l \leq \lambda \text{ und } e_l \text{ ist bzgl. } v \text{ degeneriert}\}, \quad (8.7)$$

$$\begin{aligned} D_4^*(v) &:= D_4(v) \setminus \{P_{q-3,3,0}^{[l]}, P_{q-4,4,0}^{[l]}, P_{q-4,3,1}^{[l]}, P_{q-4,1,3}^{[l+1]} : 1 \leq l \leq \lambda \\ &\quad \text{und } e_l \text{ ist bzgl. } v \text{ degeneriert}\}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Im Folgenden konstruieren wir für $q \geq 5$ Klassen bestimmender Mengen von $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ auf $D_p^*(v)$, $p = 3, 4$. Dabei setzen wir voraus, dass $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ bereits auf $\mathcal{B}_q(\tilde{\Delta}) \cap D_p^*(v)$ bestimmt ist. Wir betrachten zunächst $D_3^*(v)$. Es gilt

$$D_3^*(v) = (R_2(K) \cap D_3^*(v)) \cup \{P_{q-3,j,k}^{[l]} : j+k=3, l=2, \dots, \lambda\}.$$

Wir definieren im Folgenden eine Menge $\mathcal{M}_{3,(1,\lambda)}^2(v)$ von Teilmengen von $\{P_{q-3,j,k}^{[l]} : j+k=3, l=2, \dots, \lambda\}$ und zeigen, dass jede Menge aus $\mathcal{M}_{3,(1,\lambda)}^2(v)$ vereinigt mit einer beliebigen minimal bestimmenden Menge von $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ auf $\mathcal{B}_q(\tilde{\Delta}) \cap D_p^*(v)$ $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ auf $D_3^*(v)$ bestimmt.

Definition von $\mathcal{M}_{3,(1,\lambda)}^2(v)$:

Sei $\mathcal{A} \subset \{P_{q-3,j,k}^{[l]} : j+k=3, l=2, \dots, \lambda\}$. Es gilt $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{3,(1,\lambda)}^2(v)$ genau dann, wenn ein $l^* \in \{2, \dots, \lambda\}$ existiert, so dass die Kanten $e_{l^*-2}, e_{l^*-1}, e_{l^*}, e_{l^*+1}$ paarweise nicht kollinear sind und \mathcal{A} einen der folgenden vier Fälle erfüllt.

Fall 1: Es gilt $\lambda = 2$.

Dann gelte $\mathcal{A} = \emptyset$.

Fall 2: Es gilt $\lambda > 2$ und $l^* = 2$.

\mathcal{A} enthält für $l = 3, \dots, \lambda$ genau einen BB-Punkt aus $\{P_{q-3,3,0}^{[l]}, P_{q-3,2,1}^{[l]}, P_{q-3,1,2}^{[l]}\}$, falls e_l bzgl. v nicht degeneriert ist.

Fall 3: Es gilt $\lambda > 2$ und $l^* = \lambda$.

\mathcal{A} enthält für $l = 2, \dots, \lambda - 1$ genau einen BB-Punkt aus $\{P_{q-3,3,0}^{[l]}, P_{q-3,1,2}^{[l+1]}, P_{q-3,2,1}^{[l+1]}\}$, falls e_l bzgl. v nicht degeneriert ist.

Fall 4: Es gilt $\lambda > 3$ und $1 < l^* < \lambda$.

\mathcal{A} enthält für $l = 1, \dots, l^* - 2$ genau einen BB-Punkt aus $\{P_{q-3,3,0}^{[l]}, P_{q-3,1,2}^{[l+1]}, P_{q-3,2,1}^{[l+1]}\}$, falls e_l bzgl. v nicht degeneriert ist. Ferner enthält \mathcal{A} für $l = l^* + 1, \dots, \lambda$ genau einen BB-Punkt aus $\{P_{q-3,3,0}^{[l]}, P_{q-3,2,1}^{[l]}, P_{q-3,1,2}^{[l]}\}$, falls e_l bzgl. v nicht degeneriert ist.

Es sei $\tilde{\mathcal{A}}$ eine beliebige minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ auf $\mathcal{B}_q(\tilde{\Delta}) \cap D_3^*(v)$.

Lemma 8.8. *Sei $q \geq 5$ und sei $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{M}_{3,(1,\lambda)}^2(v)$. Dann ist $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}} \cup \mathcal{A}_0$ eine bestimmende Menge von $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ auf $D_3^*(v)$.*

Beweis. Für $q \geq 5$ sei $s \in S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ und es gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}$. Dann ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in D_3^*(v)$ gilt. Wegen $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ erhalten wir direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_q(\tilde{\Delta}) \cap D_3^*(v)$. Aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen an den Randkanten von $\tilde{\Delta}$ und am Eckpunkt v folgt ferner $\lambda_P s = 0$, $P \in R_2(K) \cap D_3^*(v)$, wobei $R_2(K)$ wie in (8.2) gegeben ist. Für $\lambda = 2$ sind die Kanten e_0, \dots, e_3 paarweise nicht kollinear. Ferner gilt $\mathcal{A}_0 = \emptyset$. Aus Korollar 8.1 folgt dann direkt die Behauptung. Sei nun $\lambda \geq 3$. Da $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{M}_{3,(1,\lambda)}^2(v)$ gilt, existiert ein $l^* \in \{2, \dots, \lambda\}$, so dass \mathcal{A}_0 von der obigen Form ist. Nach sukzessiver Anwendung von Lemma 8.5 oder Korollar 8.6 erhalten wir $\lambda_P s = 0$, $P \in D_3^*(v) \setminus \{P_{q-3,3,0}^{[l^*-1]}, P_{q-3,1,2}^{[l^*]}, P_{q-3,2,1}^{[l^*]}\}$. Da die Kanten $e_{l^*-2}, e_{l^*-1}, e_{l^*}, e_{l^*+1}$ paarweise nicht kollinear sind, folgt dann aus Korollar 8.1 bereits die Behauptung. ■

Betrachten wir statt $D_3^*(v)$ die Menge $D_3(v)$, ergibt sich aus Lemma 8.8 direkt das folgende Korollar.

Korollar 8.9. *Sei $q \geq 5$ und sei $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{M}_{3,(1,\lambda)}^2(v)$. Dann ist*

$$\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}} \cup \mathcal{A}_0 \cup \{P_{q-3,3,0}^{[l]} : 1 \leq l \leq \lambda, e_l \text{ ist bzgl. } v \text{ degeneriert}\}$$

eine bestimmende Menge von $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ auf $D_3(v)$.

Wir betrachten nun $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ auf $D_4^*(v)$. Analog zu der Definition von $\mathcal{M}_{3,(1,\lambda)}^2(v)$ definieren wir eine Menge $\mathcal{M}_{4,(1,\lambda)}^2(v)$ von Teilmengen von $D_4^*(v)$. Wir zeigen, dass die Mengen aus

$\mathcal{M}_{4,(1,\lambda)}^2(v)$ unter der Voraussetzung, dass $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ bereits auf $\mathcal{B}_q(\tilde{\Delta}) \cap D_4^*(v)$ bestimmt ist, $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ auf $D_4^*(v)$ bestimmen.

Definition von $\mathcal{M}_{4,(1,\lambda)}^2(v)$:

Es gilt $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{4,(1,\lambda)}^2(v)$ genau dann, wenn einer der folgenden beiden Fälle erfüllt ist.

Fall 1: Es gilt $\mathcal{A} \cap D_3^*(v) \in \mathcal{M}_{3,(1,\lambda)}^2(v)$. Ferner enthält \mathcal{A} für festes $\tilde{l} \in \{1, \dots, \lambda\}$ die folgenden BB-Punkte:

(8.9) für $1 \leq l < \tilde{l}$ zwei BB-Punkte aus $\{P_{q-4,3,1}^{[l]}, P_{q-4,4,0}^{[l]}, P_{q-4,1,3}^{[l+1]}, P_{q-4,2,2}^{[l+1]}\}$, falls e_l bzgl. v nicht degeneriert ist,

(8.10) für $\tilde{l} < l \leq \lambda$ zwei BB-Punkte aus $\{P_{q-4,2,2}^{[l]}, P_{q-4,3,1}^{[l]}, P_{q-4,4,0}^{[l]}, P_{q-4,1,3}^{[l+1]}\}$, falls e_l bzgl. v nicht degeneriert ist, und

(8.11) einen BB-Punkt aus $\{P_{q-4,3,1}^{[\tilde{l}]}, P_{q-4,4,0}^{[\tilde{l}]}, P_{q-4,1,3}^{[\tilde{l}]}\}$, falls $e_{\tilde{l}}$ bzgl. v nicht degeneriert ist.

Fall 2: Es existiert ein $l^* \in \{2, \dots, \lambda\}$, so dass die Kanten $e_{l^*-2}, e_{l^*-1}, e_{l^*}, e_{l^*+1}$ paarweise nicht kollinear sind und \mathcal{A} die folgenden BB-Punkte enthält:

(8.12) für $l = 1, \dots, \lambda$, $l \neq l^* - 1, l^*$ drei BB-Punkte aus $C_{l,4}^1(v)$, falls e_l bzgl. v nicht degeneriert ist, sowie entweder

(8.13) zwei BB-Punkte aus $C_{l^*,4}^1(v) \setminus \{P_{q-3,3,0}^{[l^*]}\}$ und einen BB-Punkt aus $C_{l^*-1,4}^1(v) \setminus \{P_{q-3,3,0}^{[l^*-1]}\}$ oder

(8.14) zwei BB-Punkte aus $C_{l^*-1,4}^1(v) \setminus \{P_{q-3,3,0}^{[l^*-1]}\}$ und einen BB-Punkt aus $C_{l^*,4}^1(v) \setminus \{P_{q-3,3,0}^{[l^*]}\}$.

Es sei $\tilde{\mathcal{A}}$ eine beliebige minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ auf $\mathcal{B}_q(\tilde{\Delta}) \cap D_4^*(v)$.

Lemma 8.10. *Sei $q \geq 5$ und sei $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{M}_{4,(1,\lambda)}^2(v)$. Dann ist $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}} \cup \mathcal{A}_0$ eine bestimmende Menge von $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ auf $D_4^*(v)$.*

Beweis. Für $q \geq 5$ sei $s \in S_q^2(\Delta)$. Für $l = 1, \dots, \lambda + 1$ sei $s|_{T[l]}$ in der BB-Darstellung (2.5) gegeben. Es gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}$. Somit ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in D_4^*(v)$ gilt. Wegen $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ erhalten wir direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_q(\tilde{\Delta}) \cap D_4^*(v)$. Aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen an den Randkanten von $\tilde{\Delta}$ und am Eckpunkt v folgt ferner $\lambda_P s = 0$, $P \in R_2(K) \cap D_4^*(v)$, wobei $R_2(K)$ wie in (8.2) gegeben ist.

Fall 1: Es gilt $\mathcal{A}_0 \cap D_3^*(v) \in \mathcal{M}_{3,(1,\lambda)}^2(v)$, und \mathcal{A}_0 enthält für ein $\tilde{l} \in \{1, \dots, \lambda\}$ die BB-Punkte (8.9) bis (8.11). Aus Lemma 8.8 folgt direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in D_3^*(v)$. Da \mathcal{A}_0 die

BB-Punkte (8.9) und (8.10) enthält, folgt durch sukzessive Anwendung von Lemma 8.5 oder Korollar 8.6 $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in C_{l,4}^2(v)$, $l = 1, \dots, \lambda$, $l \neq \tilde{l}$. Ist $e_{\tilde{l}}$ bzgl. v degeneriert, folgt aus Korollar 8.6 die Behauptung. Ist $e_{\tilde{l}}$ bzgl. v nicht degeneriert, enthält \mathcal{A}_0 ferner den BB-Punkt (8.11) und aus Lemma 8.5 folgt die Behauptung.

Fall 2: \mathcal{A}_0 enthält für ein $l^* \in \{2, \dots, \lambda\}$ die BB-Punkte (8.12) sowie entweder die BB-Punkte (8.13) oder (8.14), und es gilt ferner, dass die Kanten $e_{l^*-2}, e_{l^*-1}, e_{l^*}, e_{l^*+1}$ paarweise nicht kollinear sind. Aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen für $l = 1, \dots, \lambda$, $l \neq l^* - 1, l^*$, erhalten wir mit (8.12) direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in C_{l,4}^1(v)$, falls e_l bzgl. v nicht degeneriert ist. Dann gilt insbesondere $a_{q-3,3,0}^{[l]} = 0$, $l = 1, \dots, \lambda$, $l \neq l^* - 1, l^*$. Aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen auf $D_3^*(v)$ folgt dann $\lambda_P s = 0$, $P \in D_3^*(v) \setminus \{P_{q-3,3,0}^{[l^*-1]}, P_{q-3,1,2}^{[l^*]}, P_{q-3,2,1}^{[l^*]}, P_{q-3,3,0}^{[l^*]}\}$. Aus Korollar 8.1 folgt somit $\lambda_P s = 0$, $P \in D_3^*(v)$. Durch sukzessive Anwendung von Lemma 8.5 oder Korollar 8.6 erhalten wir $\lambda_P s = 0$, $P \in D_4(v) \setminus \{P_{q-4,3,1}^{[l^*-1]}, P_{q-4,4,0}^{[l^*-1]}, P_{q-4,1,3}^{[l^*]}, P_{q-4,2,2}^{[l^*]}, P_{q-4,3,1}^{[l^*]}, P_{q-4,4,0}^{[l^*]}, P_{q-4,1,3}^{[l^*+1]}\}$. O.B.d.A. enthalte \mathcal{A}_0 die BB-Punkte (8.13). Dann folgt aus der C^2 -Stetigkeitsbedingung an der Kante e_{l^*} , dass $\lambda_P s = 0$, $P \in C_{l^*,4}^2(v)$, gilt. Mit der C^2 -Stetigkeitsbedingung auf $C_{l^*-1,4}^2(v)$ erhalten wir schließlich $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in D_4^*(v)$. Enthält \mathcal{A}_0 statt der Punkte (8.13) die Punkte (8.14), folgt die Behauptung analog. ■

Betrachten wir statt $D_4^*(v)$ die Menge $D_4(v)$, ergibt sich aus Lemma 8.10 direkt das folgende Korollar.

Korollar 8.11. *Sei $q \geq 5$ und sei $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{M}_{4,(1,\lambda)}^2(v)$. Dann ist*

$$\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}} \cup \mathcal{A}_0 \cup \{P_{q-3,3,0}^{[l]}, P_{q-4,4,0}^{[l]}, P_{q-4,3,1}^{[l]} : 1 \leq l \leq \lambda, e_l \text{ ist bzgl. } v \text{ degeneriert}\}$$

eine bestimmende Menge von $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ auf $D_4(v)$.

8.1.2 C^2 -Mengen entlang einer Kante

Es sei v ein Randpunkt von $\tilde{\Delta} \subset \Delta$ und ein innerer Eckpunkt von Δ . Dann sei K der Kegel von v bzgl. $\tilde{\Delta}$. K besitze λ innere Kanten, $\lambda \geq 2$. Im Folgenden konstruieren wir für $q \geq 5$ und $l \in \{1, \dots, \lambda\}$ zwei große Klassen minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(K)$ auf den C^2 -Mengen $C_{l,p}^2(v)$, $p = 5, \dots, q$. Für $q \geq 5$ und $l = 1, \dots, \lambda$ definieren wir

$$R_2(e_l) := \begin{cases} \bigcup_{p=5}^q C_{l,p}^2(v) \cup C_{l,q}^1(v) \cup \{P_{0,q,0}^{[l]}\}, & \text{falls } e_l \text{ bzgl. } v \text{ degeneriert ist,} \\ \bigcup_{p=5}^q C_{l,p}^2(v), & \text{sonst.} \end{cases} \quad (8.15)$$

Offensichtlich gilt

$$\dim S_q^2(K)|_{R_2(e_l)} = \begin{cases} 3q - 12, & \text{falls } e_l \text{ bzgl. } v_l \text{ degeneriert ist,} \\ 3q - 9, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (8.16)$$

Eine bestimmende Menge von $S_q^2(K)$ auf $R_2(e_l)$ enthält aus einer C^2 -Menge $C_{l,p}^2(v)$ maximal sechs BB-Punkte, falls e_l nicht degeneriert ist, da ansonsten $S_q^2(K)$ überbestimmt wäre. Wir verwenden im Folgenden zwei verschiedene Methoden, um minimal bestimmende Mengen von $S_q^2(K)$ auf $R_2(e_l)$ zu konstruieren. Bei der ersten Methode bestimmen wir $S_q^2(K)$ für ein $\tilde{p} \in \{5, \dots, q\}$ zunächst auf der C^2 -Menge $C_{l,\tilde{p}}^2(v)$. Ausgehend von dieser C^2 -Menge bestimmen wir $S_q^2(K)$ sukzessive auf den restlichen C^2 -Mengen. Bei der zweiten Methode verwenden wir die Charakterisierung minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(K)$ auf $R_1(e_l)$ aus Abschnitt 4.1.1. Wir wählen eine minimal bestimmende Menge auf den beteiligten C^1 -Mengen und ergänzen diese durch BB-Punkte aus $\{P_{q-p+2,0,2}^{[l]}, P_{q-p+2,2,0}^{[l+1]} : p = 5, \dots, q\}$ so, dass die Vereinigung aller BB-Punkte eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(K)$ auf $R_2(e_l)$ bildet. Ist e_l bzgl. v oder bzgl. v_l degeneriert, sind die C^2 -Mengen $C_{l,p}^2(v)$, $p = 5, \dots, q$, paarweise disjunkt. Bei der Wahl einer minimal bestimmenden Menge von $S_q^2(K)$ auf $R_2(e_l)$ müssen wir daher lediglich eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(K)$ auf jeder C^2 -Mengen wählen. Ist e_l bzgl. v_l degeneriert, ergibt die Vereinigung dieser BB-Punkte eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(K)$ auf $R_2(e_l)$. Ist e_l bzgl. v degeneriert, müssen wir ferner eine minimal bestimmende Menge auf $C_{l,q}^1(v)$ wählen und den BB-Punkt $P_{0,q,0}^{[l]}$ berücksichtigen.

Im Folgenden konstruieren wir für $l = 1, \dots, \lambda$ eine Menge $\mathcal{M}_{5,q}^2(e_l)$ von Teilmengen von $R_2(e_l)$. Wir werden zeigen, dass $\mathcal{M}_{5,q}^2(e_l)$ allgemeine Klassen minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(K)$ auf $R_2(e_l)$ beschreibt.

Definition von $\mathcal{M}_{5,q}^2(e_l)$:

Es gilt $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{5,q}^2(e_l)$ genau dann, wenn einer der folgenden drei Fälle erfüllt ist.

Fall 1: e_l ist nicht degeneriert.

a) Für ein festes $\tilde{p} \in \{5, \dots, q\}$ enthält \mathcal{A} die folgenden BB-Punkte:

(8.17) sechs BB-Punkte aus $C_{l,\tilde{p}}^2(v)$, die eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(K)$ auf $C_{l,p^*}^2(v)$ bilden,

(8.18) für $5 \leq p < \tilde{p}$ drei BB-Punkte aus $C_{l,p}^2(v) \setminus C_{l,p+1}^2(v)$, die nicht alle in $C_{l,p-1}^1(v)$ liegen,

(8.19) für $\tilde{p} < p < q$ drei BB-Punkten aus $C_{l,p}^2(v) \setminus C_{l,p-1}^2(v)$, die nicht alle in $C_{l,p}^1(v)$ liegen.

b) Es gilt $\mathcal{A} \cap R_1(e_l) \in \mathcal{M}_{4,q}^1(e_l)$, wobei $\mathcal{M}_{4,q}^1(e_l)$ für $q \geq 5$ analog zur Menge $\mathcal{M}_{3,q}^1(e_l)$ aus Abschnitt 4.1.1 definiert sei. \mathcal{A} enthält ferner

(8.20) für $p = 5, \dots, q$ einen BB-Punkt aus $\{P_{q-p,p-2,2}^{[l]}, P_{q-p,2,p-2}^{[l+1]}\}$.

Fall 2: e_l ist bzgl. v_l degeneriert, und \mathcal{A} enthält für $p = 5, \dots, q$ drei BB-Punkte aus $C_{l,p}^2(v)$, die nicht alle in $C_{l,p}^1(v)$ liegen.

Fall 3: e_l ist bzgl. v degeneriert, und \mathcal{A} enthält für $p = 5, \dots, q$ drei BB-Punkte aus $C_{l,p}^2(v)$, die nicht alle in $C_{l,p-1}^1(v)$ liegen. Ferner enthält \mathcal{A} zwei BB-Punkte aus $C_{l,q}^1(v)$ und den BB-Punkt $P_{0,q,0}^{[l]}$.

Lemma 8.12. *Sei $q \geq 5$ und sei $l \in \{1, \dots, \lambda\}$. Ferner sei $\mathcal{A}_l \in \mathcal{M}_{5,q}^2(e_l)$. Dann ist \mathcal{A}_l eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(K)$ auf $R_2(e_l)$.*

Beweis. Für $q \geq 5$ sei $s \in S_q^2(K)$. Wir zeigen zunächst, dass \mathcal{A}_l eine bestimmende Menge von $S_q^2(K)$ auf $R_2(e_l)$ ist. Es gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}_l$. Dann ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in R_2(e_l)$ gilt.

Fall 1: e_l ist nicht degeneriert. Enthält \mathcal{A}_l die BB-Punkte (8.17) bis (8.19), dann folgt direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in C_{l,p}^2(v)$. Nach sukzessiver Anwendung von Lemma 8.5 folgt dann die Behauptung. Gilt hingegen $\mathcal{A}_l \cap R_1(e_l) \in \mathcal{M}_{4,q}^1(e_l)$ und enthält \mathcal{A}_l ferner den BB-Punkt (8.20), dann folgt aus Theorem 4.4 $\lambda_P s = 0$, $P \in C_{l,p}^1(v)$, $p = 4, \dots, q$. Für $p = 5, \dots, q$ folgt dann aus Lemma 8.5, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in R_2(e_l)$ gilt.

Fall 2: e_l ist bzgl. v_l degeneriert. Nach Definition von \mathcal{A}_l folgt aus Korollar 8.6 direkt $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in R_2(e_l)$.

Fall 3: e_l ist bzgl. v degeneriert. Nach Definition von \mathcal{A}_l erhalten wir aus Korollar 8.6 und der C^1 -Stetigkeitsbedingung auf $C_{l,q}^1(v)$ direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in R_2(e_l)$.

Es bleibt zu zeigen, dass \mathcal{A}_l minimal ist. Mit (8.16) und Theorem 2.4 folgt dies direkt aus

$$|\mathcal{A}_l| = \begin{cases} 3q - 12, & \text{falls } e_l \text{ bzgl. } v_l \text{ degeneriert ist,} \\ 3q - 9, & \text{sonst} \end{cases} = \dim S_q^1(K)|_{R_2(e_l)}. \quad \blacksquare$$

Es sei nun die Situation gegeben, dass e_l nicht degeneriert ist und dass $S_q^2(K)$ auf $C_{l,4}^1(v)$ eindeutig bestimmt ist. In diesem Fall definieren wir $\tilde{\mathcal{M}}_{5,q}^2(e_l)$ als die Menge der folgenden Teilmengen von $R_2(e_l)$.

Definition von $\tilde{\mathcal{M}}_{5,q}^2(e_l)$:

Es gilt $\mathcal{A} \in \tilde{\mathcal{M}}_{5,q}^2(e_l)$ genau dann, wenn \mathcal{A} einen der beiden folgenden Fälle erfüllt.

Fall 1: Für $p = 5, \dots, q$ enthält \mathcal{A} drei BB-Punkte aus $C_{l,p}^2(v) \setminus C_{l,p-1}^1(v)$, die nicht alle in $C_{l,p}^1(v)$ liegen.

Fall 2: Für $\mathcal{A}_l \in \mathcal{M}_{5,q}^1(e_l)$ mit $P_{q-4,4,0}^{[l]} \in \mathcal{A}_l$ gilt $\mathcal{A}_l \setminus \{P_{q-4,4,0}^{[l]}\} \subset \mathcal{A}$. Ferner enthält \mathcal{A} für $p = 5, \dots, q$ einen BB-Punkt aus $\{P_{q-p,p-2,2}^{[l]}, P_{q-p,2,p-2}^{[l+1]}\}$.

Für $q \geq 5$ sei $\tilde{\mathcal{A}}$ eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(K)$ auf $C_{l,4}^1(v)$. Aus Lemma 8.12 ergibt sich direkt das folgende Korollar.

Korollar 8.13. *Sei $q \geq 5$ und sei $\mathcal{A} \in \tilde{\mathcal{M}}_{5,q}^2(e_l)$. Dann ist $\tilde{\mathcal{A}} \cup \mathcal{A}$ eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(K)$ auf $R_2(e_l)$.*

8.1.3 C^2 -Mengen um einen Eckpunkt für Clough-Tocher-Dreiecke

Es sei v ein Randpunkt von $\tilde{\Delta} \subset \Delta$ und ein innerer Eckpunkt von Δ . Im Folgenden sei K der Kegel von v bzgl. $\tilde{\Delta}$. Wir nehmen an, dass K nicht vier aufeinander folgende Kanten besitzt, die von v ausgehen und paarweise nicht kollinear sind. Wir modifizieren in diesem Fall für $q = 5, 6$ den Kegel K durch einen oder zwei Clough-Tocher-Splits so, dass der modifizierte Kegel K^* genau vier Kanten mit paarweise verschiedener Steigung besitzt, die von v ausgehen. Es sei $T^{[l]}$ ein Dreieck von K , das durch einen Clough-Tocher-Split unterteilt wird. Dabei bezeichne y_l den Schwerpunkt von $T^{[l]}$. Im Folgenden betrachten wir $S_q^2(K^*)$ auf den Mengen $D_p(y_l)$, $p = 2, 3, 4$. Wir geben zunächst eine vollständige Charakterisierung der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^2(K^*)$ auf $D_2(y_l)$ an. Anschließend konstruieren wir aufbauend auf diesen Ergebnissen für $p = 3, 4$ allgemeine Klassen minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(K^*)$ auf $D_p(y_l)$.

Unterteilen wir das Dreieck $T^{[l]}$ von K , dann enthält K^* die Dreiecke $T^{[l,\mu]}$, $\mu = 1, 2, 3$. Die Eckpunkte und Dreiecke von $\cup_{\mu=1}^3 T^{[l,\mu]}$ seien wie in Abbildung 8.5 nummeriert. Ferner gelte $e_{l,\mu} := [y_l, v_\mu^{[l,\mu]}]$, $\mu = 1, 2, 3$. Zur besseren Lesbarkeit verzichten wir bei den folgenden Ausführungen auf den Index l .

Offensichtlich gilt für die Standardzelle Δ_y von y , dass $\Delta_y = T^{[1]} \cup T^{[2]} \cup T^{[3]}$ ist. Mit Gleichung (8.6) erhalten wir für $q \geq 5$ und $p \geq 2$

$$\dim S_q^2(K^*)|_{D_p(y)} = 3 \frac{(p-1)(p-2)}{2} + 7. \quad (8.21)$$

Wir beginnen mit der vollständigen Charakterisierung der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^2(K^*)$, $q \geq 5$, auf $D_2(y)$. Die BB-Punkte in $D_2(y)$ seien wie in Abbildung 8.6 bezeichnet. Offensichtlich enthält jede minimal bestimmende Menge von $S_q^2(K^*)$ auf $D_2(y)$ maximal drei BB-Punkte aus $D_1(y)$. Wir definieren eine Menge $\mathcal{M}_2^2(\Delta_y)$ von Teilmengen von $D_2(y)$ und zeigen, dass $\mathcal{M}_2^2(\Delta_y)$ die Menge aller minimal bestimmenden Mengen von $S_q^2(K^*)$ auf $D_2(y)$ darstellt.

Definition von $\mathcal{M}_2^2(\Delta_y)$:

Sei $\mathcal{A} \subset D_2(y)$. Es gilt $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_2^2(\Delta_y)$ genau dann, wenn \mathcal{A} einen der folgenden vier Fälle erfüllt.

Fall 1: Es gilt $|\mathcal{A} \cap D_1(y)| = 3$.

\mathcal{A} enthält drei BB-Punkte aus $D_1(y)$. Ferner enthält \mathcal{A} drei BB-Punkte aus $R_2(y)$, so dass für $\mu = 1, 2, 3$ maximal zwei dieser BB-Punkte in $C_{\mu,2}^1(y)$ liegen.

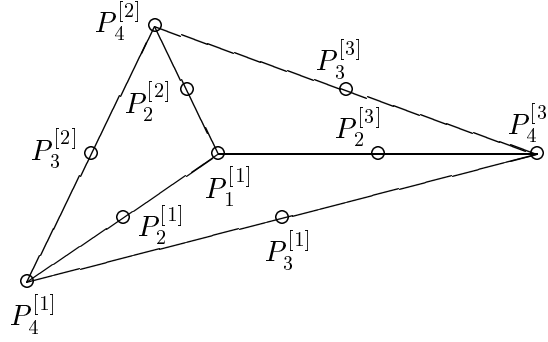


Abb. 8.6: Bezeichnung der BB-Punkte in $D_2(y)$.

Fall 2: Es gilt $|\mathcal{A} \cap D_1(y)| = 2$.

a) \mathcal{A} enthält für ein $\mu \in \{1, 2, 3\}$ die BB-Punkte $P_1^{[1]}$ und $P_2^{[\mu]}$. Ferner enthält \mathcal{A} vier BB-Punkte aus $R_2(y)$, so dass maximal zwei dieser BB-Punkte in $C_{\mu,2}^1(y)$ liegen und die vier Punkte nicht gleich der Menge $\{P_3^{[\mu+2]}, P_4^{[1]}, P_4^{[2]}, P_4^{[3]}\}$ sind.

b) \mathcal{A} enthält für ein $\mu \in \{1, 2, 3\}$ die BB-Punkte $P_2^{[\mu]}, P_2^{[\mu+1]}, P_4^{[\mu+2]}$. Ferner enthält \mathcal{A} genau drei BB-Punkte aus $R_2(y) \setminus \{P_4^{[\mu+2]}\}$, so dass maximal zwei dieser Punkte in $C_{\nu,2}^1(y)$, $\nu = \mu, \mu + 1$, liegen.

Fall 3: Es gilt $|\mathcal{A} \cap D_1(y)| = 1$.

a) \mathcal{A} enthält den BB-Punkt $P_1^{[1]}$ und fünf BB-Punkte aus $R_2(y)$.

b) \mathcal{A} enthält für ein $\mu \in \{1, 2, 3\}$ die BB-Punkte $P_2^{[\mu]}, P_3^{[\mu+2]}, P_4^{[\mu+1]}, P_4^{[\mu+2]}$ und zwei BB-Punkte aus $\{P_3^{[\mu]}, P_3^{[\mu+1]}, P_4^{[\mu]}\}$.

Fall 4: Es gilt $|\mathcal{A} \cap D_1(y)| = 0$, d.h. es gilt $\mathcal{A} = R_2(y)$.

Das folgende Lemma besagt, dass $\mathcal{M}_2^2(\Delta_y)$ gleich der Menge der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^2(K^*)$ auf $D_2(y)$ ist.

Lemma 8.14. *Sei $q \geq 5$. \mathcal{A} ist genau dann eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(K^*)$ auf $D_2(y)$, wenn $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_2^2(\Delta_y)$ gilt.*

Beweis. Sei $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_2^2(\Delta_y)$. Aus den C^1 - und C^2 -Stetigkeitsbedingungen auf $D_2(y)$ folgt direkt, dass \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_q^2(K^*)$ auf $D_2(y)$ ist. Ferner ist \mathcal{A} minimal, denn mit (8.21) gilt $|\mathcal{A}| = 6 = \dim S_q^2(K^*)|_{D_2(y)}$.

Sei nun \mathcal{A} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(K^*)$ auf $D_2(y)$. Dann enthält \mathcal{A} maximal drei Punkte aus $\{P_1^{[1]}, P_2^{[\mu]} : \mu = 1, 2, 3\}$.

Annahme: Es gilt $\mathcal{A} \notin \mathcal{M}_2^2(\Delta_y)$.

Dann gilt für ein festes $\mu \in \{1, 2, 3\}$ eine der folgenden Aussagen:

- (i) $\{P_2^{[\mu]}, P_3^{[\mu]}, P_4^{[\mu]}, P_3^{[\mu+1]}\} \subset \mathcal{A}$,

- (ii) $|\mathcal{A} \cap \{P_1^{[1]}, P_2^{[1]}, P_2^{[2]}, P_2^{[3]}, P_3^{[\mu]}, P_3^{[\mu+1]}, P_4^{[\mu]}\}| = 6$,
- (iii) $|\mathcal{A} \cap \{P_2^{[\mu]}, P_2^{[\mu+1]}, P_3^{[1]}, P_3^{[2]}, P_3^{[3]}, P_4^{[\mu]}, P_4^{[\mu+1]}\}| = 6$ oder
- (iv) $\mathcal{A} = \{P_1^{[1]}, P_2^{[\mu]}, P_3^{[\mu+2]}, P_4^{[1]}, P_4^{[2]}, P_4^{[3]}\}$.

In den Fällen (i)-(iii) ist $S_q^2(K^*)$ durch \mathcal{A} offensichtlich überbestimmt.

Wir betrachten nun den Fall (iv). O.B.d.A. sei $\mathcal{A} = \{P_1^{[1]}, P_2^{[1]}, P_3^{[3]}, P_4^{[1]}, P_4^{[2]}, P_4^{[3]}\}$. Sei $s \in S_q^2(K^*)$ und es gelte $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{A}$. Ist $s|_{T^{[\mu]}}$, $\mu = 1, 2, 3$, in der BB-Darstellung (2.5) gegeben, bezeichne $a_i^{[\mu]}$ den zu $P_i^{[\mu]}$ gehörigen Bézier-Koeffizienten, $i = 2, 3, 4$. Aus den C^1 - und C^2 -Stetigkeitsbedingungen ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2^{[2]} \\ a_2^{[3]} \\ a_3^{[1]} \\ a_3^{[2]} \end{pmatrix} = 0.$$

Bezeichnen wir die obige Matrix mit M , so gilt $\det M = 0$, d.h. das Gleichungssystem besitzt keine eindeutige Lösung. \mathcal{A} ist somit im Widerspruch zur Annahme keine bestimmende Menge von $S_q^2(K^*)$ auf $D_2(y)$. Für $\mu = 2, 3$ folgt die Behauptung analog zum Fall $\mu = 1$. ■

Nachdem wir die minimal bestimmende Menge von $S_q^2(K^*)$ auf $D_2(y)$ vollständig charakterisiert haben, betrachten wir nun $S_q^2(K^*)$ auf $D_3(y)$. Analog zur Definition der Menge $\mathcal{M}_2^2(\Delta_y)$ beschreiben wir eine Menge $\mathcal{M}_3^2(\Delta_y)$ von Teilmengen von $D_3(y)$.

Definition von $\mathcal{M}_3^2(\Delta_y)$:

Es gilt $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_3^2(\Delta_y)$ genau dann, wenn \mathcal{A} einen der folgenden drei Fälle erfüllt.

Fall 1: \mathcal{A} enthält die folgenden BB-Punkte:

(8.22) die BB-Punkte einer Menge $\tilde{\mathcal{A}} \in \mathcal{M}_2^2(\Delta_y)$ und

(8.23) vier BB-Punkte aus $R_3(y)$, so dass für $\mu = 1, 2, 3$ maximal zwei dieser BB-Punkte in $C_{\mu,3}^1(y)$ und maximal drei dieser BB-Punkte in $C_{\mu,3}^2(y)$ liegen.

Fall 2: Für $\mu, \nu \in \{1, 2, 3\}$, $\mu \neq \nu$, enthält \mathcal{A} die folgenden BB-Punkte:

(8.24) die BB-Punkte einer Menge $\mathcal{A}_\mu \in \mathcal{M}_{1,3}^1(e_\mu)$ und

(8.25) drei BB-Punkte aus $C_{\nu,3}^1(y)$.

Dabei sei die Menge $\mathcal{M}_{1,3}^1(e_\mu)$ analog zur Menge $\mathcal{M}_{3,q}^1(e_l)$ aus Abschnitt 4.1.1 definiert.

Fall 3: \mathcal{A} enthält die folgenden BB-Punkte:

(8.26) drei BB-Punkte aus $C_{\mu,3}^1(y)$, $\mu = 1, 2, 3$, und

(8.27) einen BB-Punkt aus $D_3(y) \setminus \{P : P \in C_{\mu,3}^1(y), \mu = 1, 2, 3\}$.

Lemma 8.15. *Sei $q \geq 5$ und sei $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_3^2(\Delta_y)$. Dann ist \mathcal{A} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(K^*)$ auf $D_3(y)$.*

Beweis. Sei $q \geq 5$ und es gelte $s \in S_q^2(K^*)$. Ferner sei $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_3^2(\Delta_y)$ und es gelte $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{A}$. Es ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$, $P \in D_3(y)$, gilt. Für $\mu = 1, 2, 3$ sei $s|_{T[\mu]}$ in der BB-Darstellung (2.5) gegeben.

Fall 1: \mathcal{A} besteht aus den BB-Punkten (8.22) und (8.23). Aus Lemma 8.14 folgt dann direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in D_2(y)$. Ferner gilt eine der folgenden beiden Aussagen:

- (i) Für ein festes $\mu \in \{1, 2, 3\}$ enthält \mathcal{A} drei BB-Punkte aus $C_{\mu,3}^2(y) \cap R_3(y)$, die nicht alle in $C_{\mu,3}^1(y)$ liegen, und einen weiteren BB-Punkt aus $R_3(y) \setminus C_{\mu,3}^2(y)$.
- (ii) Es gilt $\{P_{3,q-3,0}^{[1]}, P_{0,3,q-3}^{[2]}, P_{q-3,0,3}^{[3]}\} \subseteq \mathcal{A}$, und es existiert ein $\mu \in \{1, 2, 3\}$, so dass \mathcal{A} einen weiteren Punkt aus $C_{\mu,3}^1(y) \cap R_3(y)$ enthält.

Wir betrachten zunächst den Fall (i). Aus Lemma 8.5 folgt $\lambda_P s = 0$, $P \in C_{\mu,3}^2(y)$. Nach Voraussetzung enthält \mathcal{A} für ein $\nu \in \{1, 2, 3\}$, $\nu \neq \mu$, einen BB-Punkt aus $(C_{\nu,3}^2(y) \setminus C_{\mu,3}^2(y)) \cap R_3(y)$. Somit folgt $\lambda_P s = 0$, $P \in C_{\nu,3}^2(y)$. Aus der C^1 -Stetigkeitsbedingung auf $C_{\xi,3}^1(y)$, $\xi \in \{1, 2, 3\} \setminus \{\mu, \nu\}$, folgt schließlich $\lambda_P s = 0$, $P \in D_3(y)$.

Wir betrachten nun den Fall (ii). O.B.d.A. gelte $\mathcal{A} \cap R_3(y) = \{Q, P_{3,q-3,0}^{[1]}, P_{0,3,q-3}^{[2]}, P_{q-3,0,3}^{[3]}\}$ mit $Q \in \{P_{2,q-3,1}^{[1]}, P_{2,1,q-3}^{[2]}\}$. Aus der C^1 -Stetigkeitsbedingung auf $C_{1,3}^1(y)$ folgt direkt $a_{3,q-3,0}^{[1]} = a_{2,q-3,1}^{[1]} = a_{2,1,q-3}^{[2]} = 0$. Für die restlichen Koeffizienten ergibt sich aus den C^1 - und C^2 -Stetigkeitsbedingungen das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,q-3,2}^{[1]} \\ a_{1,2,q-3}^{[2]} \\ a_{q-3,2,1}^{[3]} \\ a_{q-3,1,2}^{[3]} \end{pmatrix} = 0.$$

Bezeichnen wir die obige Matrix mit M , so gilt $\det M = 3$. Das Gleichungssystem besitzt demnach nur die triviale Lösung. Somit folgt, dass \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_q^2(K^*)$ auf $D_3(y)$ ist. Für $\mu = 2$ und $\mu = 3$ folgt die Behauptung analog.

Fall 2: \mathcal{A}_3 enthält die BB-Punkte (8.24) und (8.25). Aus Theorem 4.4 erhalten wir $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \cup_{p=1}^3 C_{\mu,p}^1(y) \cup C_{\nu,3}^1(y)$. Sei $\xi \in \{1, 2, 3\} \setminus \{\mu, \nu\}$, dann folgt aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen auf $C_{\xi,2}^2(y)$ und $C_{\xi,3}^2(y)$ die Behauptung.

Fall 3: \mathcal{A}_3 enthält die BB-Punkte (8.26) und (8.27). Aus der C^1 -Stetigkeitsbedingung auf $C_{\mu,3}^1(y)$ folgt direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in C_{\mu,3}^1(y)$, $\mu = 1, 2, 3$. Nach Voraussetzung gilt ferner eine der folgenden beiden Aussagen:

(i) Für ein $\nu \in \{1, 2, 3\}$ gilt $|\mathcal{A} \cap (C_{\nu,2}^1(y) \setminus C_{\nu,3}^1(y))| = 1$.

(ii) Es gilt $P_{0,q,0}^{[1]} \in \mathcal{A}$.

Wir betrachten zunächst den Fall (i). Aus der C^2 -Stetigkeitsbedingung auf $C_{\nu,3}^2(y)$ folgt $\lambda_P s = 0$, $P \in C_{\nu,3}^2(y)$. Da für $\mu \in \{1, 2, 3\}$, $\mu \neq \nu$, $|C_{\mu,2}^1(y) \cap C_{\nu,2}^1(y)| = 1$ gilt, folgt ferner $\lambda_P s = 0$, $P \in C_{\mu,3}^2(y)$, $\mu = 1, 2, 3$. Damit sind drei (nicht kollineare) BB-Punkte aus $D_1(y)$ bestimmt, und wir erhalten $\lambda_P s = 0$, $P \in D_1(y)$, und somit die Behauptung.

Wir betrachten nun den Fall (ii). Nach Voraussetzung gilt $a_{0,q,0}^{[1]} = 0$. Aus den C^1 - und C^2 -Stetigkeitsbedingungen auf $D_3(y) \setminus \{P : P \in C_{\mu,3}^1(y), \mu = 1, 2, 3\}$ folgt

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -6 & 0 \\ -6 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,q-2,1}^{[1]} \\ a_{1,q-1,0}^{[1]} \\ a_{1,1,q-2}^{[2]} \\ a_{0,1,q-1}^{[2]} \\ a_{q-2,1,1}^{[3]} \\ a_{q-1,0,1}^{[3]} \end{pmatrix} = 0.$$

Bezeichnen wir die obige Matrix mit M , so gilt $\det M = 486$. Das Gleichungssystem besitzt somit nur die triviale Lösung, und es folgt $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in D_3(y)$.

Es bleibt zu zeigen, dass \mathcal{A} minimal ist. Nach Konstruktion von \mathcal{A} und mit Gleichung (8.21) gilt $|\mathcal{A}| = 10 = \dim S_q^2(K^*)|_{D_3(y)}$. Aus Theorem 2.4 folgt somit, dass \mathcal{A} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(K^*)$ auf $D_3(y)$ ist. ■

Bemerkung 8.16. Sei $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_3^2(\Delta_y)$ wie im Fall 1 gewählt. Dann ist $\mathcal{A} \cap D_p(y)$ für $p = 1, 2$ eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(K^*)$ auf $D_p(y)$ ist. Ist $\tilde{\mathcal{A}}$ eine beliebige minimal bestimmende Menge von $S_q^2(K^*)$ auf $D_3(y)$, so dass $\tilde{\mathcal{A}} \cap D_p(y)$ für $p = 1, 2$ eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(K^*)$ auf $D_p(y)$ ist, dann müssen die vier BB-Punkte in $\tilde{\mathcal{A}} \cap R_3(y)$ den Bedingungen in (8.23) genügen, da ansonsten $S_q^2(K^*)$ auf $R_3(y)$ nicht eindeutig bestimmt ist. Somit folgt, dass die Klasse der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^2(K^*)$ auf $D_3(y)$ mit der Eigenschaft, dass $\mathcal{A} \cap D_p(y)$ für $p = 1, 2, 3$ eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(K^*)$ auf $D_p(y)$ ist, in $\mathcal{M}_3^2(\Delta_y)$ enthalten ist.

Wir wenden uns nun den minimal bestimmenden Mengen von $S_q^2(K^*)$ auf $D_4(y)$ zu. Wir beschreiben wiederum eine Menge $\mathcal{M}_4^2(\Delta_y)$ von Teilmengen auf $D_4(y)$ und zeigen, dass die Mengen aus $\mathcal{M}_4^2(\Delta_y)$ minimal bestimmende Mengen von $S_q^2(K^*)$ auf $D_4(y)$ darstellen. Wir konstruieren diese Teilmengen analog zur Konstruktion der Punktmengen von $\mathcal{M}_3^2(\Delta_y)$ im Fall 1 und Fall 2. Wir zeigen ferner, dass die Vorgehensweise, die der Definition der Mengen $\mathcal{M}_3^2(\Delta_y)$ im Fall 3 zu Grunde liegt, nicht zur Konstruktion minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(K^*)$ auf $D_4(y)$ verwendet werden kann.

Definition von $\mathcal{M}_4^2(\Delta_y)$:

Sei $\mathcal{A} \subset D_4(y)$. Es gilt $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_4^2(\Delta_y)$ genau dann, wenn \mathcal{A} einen der folgenden beiden Fälle erfüllt.

Fall 1: \mathcal{A} enthält für festes $\mu \in \{1, 2, 3\}$ die folgenden BB-Punkte:

(8.28) die BB-Punkte der Menge $\tilde{\mathcal{A}} \in \mathcal{M}_3^2(\Delta_y)$ und

(8.29) sechs BB-Punkte aus $R_4(y)$, so dass genau drei dieser BB-Punkte in $C_{\mu,4}^2(y) \cap R_4(y)$ und maximal zwei davon in $C_{\mu,4}^1(y)$ liegen, und für $\nu \in \{1, 2, 3\}$, $\nu \neq \mu$, maximal zwei der sechs BB-Punkte in $C_{\nu,4}^2(y) \setminus C_{\mu,2}^2(y)$ liegen.

Fall 2: Für $\mu, \nu, \xi \in \{1, 2, 3\}$, $\nu \neq \mu \neq \xi$ enthält \mathcal{A} die folgenden BB-Punkte:

(8.30) die BB-Punkte einer Menge $\mathcal{A}_\nu \in \mathcal{M}_{1,4}^1(e_\nu)$ und einer Menge $\mathcal{A}_\mu \in \mathcal{M}_{3,4}^1(e_\mu)$,

(8.31) einen BB-Punkt aus $\{P_{2,q-4,2}^{[1]}, P_{2,2,q-4}^{[2]}, P_{q-4,2,2}^{[3]}\}$ und

(8.32) einen BB-Punkt aus $C_{\xi,4}^1(y) \setminus C_{\xi,3}^1(y)$.

Die Mengen $\mathcal{M}_{1,4}^1(e_\nu)$ und $\mathcal{M}_{3,4}^1(e_\mu)$ seien hierbei analog zu $\mathcal{M}_{3,q}^1(e_l)$ aus Abschnitt 4.1.1 definiert.

Lemma 8.17. *Sei $q \geq 5$ und sei $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_4^2(\Delta_y)$. Dann ist \mathcal{A} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(K^*)$ auf $D_4(y)$.*

Beweis. Sei $q \geq 5$ und es gelte $s \in S_q^2(K^*)$. Ferner sei $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_4^2(\Delta_y)$ und es gelte $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{A}$. Dann ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$, $P \in D_4(y)$, gilt. Für $\mu = 1, 2, 3$ sei $s|_{T^{[\mu]}}$ in der BB-Darstellung (2.5) gegeben.

Fall 1: \mathcal{A} besteht aus den BB-Punkten (8.28) und (8.29). Aus Lemma 8.15 erhalten wir direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in D_3(y)$. Aus Lemma 8.5 folgt ferner $\lambda_P s = 0$, $P \in C_{\mu,4}^2(y)$. Nach wiederholter Anwendung von Lemma 8.5 auf $C_{\nu,4}^2(y)$ für $\nu = 1, 2, 3$, $\nu \neq \mu$, folgt die Behauptung.

Fall 2: \mathcal{A} besteht aus den BB-Punkten (8.30) bis (8.32). Aus Theorem 4.4 folgt direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in C_{l,p}^1(y)$, $p = 1, \dots, 4$, $l = \mu, \nu$. Analog zum Beweis von Lemma 8.15, Fall 2, erhalten wir $\lambda_P s = 0$, $P \in D_3(y)$. Da \mathcal{A} den BB-Punkt (8.31) enthält, folgt aus Lemma 8.5 $\lambda_P s = 0$, $P \in R_4(y) \setminus C_{\xi,4}^1(y)$. Nach Voraussetzung enthält \mathcal{A} ferner den BB-Punkt (8.31), so dass aus Lemma 8.5 die Behauptung folgt.

Es bleibt zu zeigen, dass \mathcal{A} minimal ist. Nach Konstruktion von \mathcal{A} und mit Gleichung (8.21) gilt $|\mathcal{A}| = 16 = \dim S_q^2(K^*)|_{D_4(y)}$. Aus Theorem 2.4 folgt somit, dass \mathcal{A} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(K^*)$ auf $D_4(y)$ ist. ■

Bemerkung 8.18. Mit Bemerkung 8.16 und der Wahl der BB-Punkte einer Menge $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_4^2(\Delta_y)$ im Fall 1 folgt, dass $\mathcal{A} \cap D_3(y)$ eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(K^*)$ auf $D_p(y)$, $p = 1, 2, 3$, ist. Mit (8.29) folgt ferner, dass \mathcal{A} maximal zwei BB-Punkte aus $C_{\mu,4}^1(y) \cap R_4(y)$ und maximal drei BB-Punkte aus $C_{\mu,4}^2(y) \cap R_4(y)$, $\mu = 1, 2, 3$, enthält. Nehmen wir an, dass die BB-Punkte aus $\mathcal{A} \cap R_4(y)$ nicht die in (8.29) gegebene Bedingung erfüllen, dann kann \mathcal{A} nur für $\mu = 1, 2, 3$ zwei BB-Punkte aus $C_{\mu,4}^1(y) \cap R_4(y)$ enthalten. Dies führt zu dem homogenen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{2,q-4,2}^{[1]} \\ a_{2,2,q-4}^{[2]} \\ a_{q-4,2,2}^{[3]} \end{pmatrix} = 0.$$

Bezeichnen wir die obige Matrix mit M , so gilt $\det M = 0$. Das Gleichungssystem hat somit keine eindeutige Lösung, d.h. bei dieser Wahl von BB-Punkten in $R_4(y)$ ist \mathcal{A} keine bestimmende Menge von $S_q^2(K^*)$ auf $D_4(y)$. Somit folgt, dass die Klasse der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^2(K^*)$ auf $D_4(y)$ mit der Eigenschaft, dass $\mathcal{A} \cap D_p(y)$ für $p = 1, 2, 3, 4$ eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(K^*)$ auf $D_p(y)$ ist, in $\mathcal{M}_4^2(\Delta_y)$ enthalten ist.

Betrachten wir nun die Verallgemeinerung des Falls 3 bei der Wahl der Punktmengen $\mathcal{M}_3^2(\Delta_y)$ für $D_4(y)$, so folgt analog zu Bemerkung 8.18, dass eine solche Menge keine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(K^*)$ auf $D_4(y)$ ist. Per Konstruktion wäre diese Menge eine bestimmende Menge von $S_q^2(K^*)$ auf $C_{\mu,3}^1(y) \cup C_{\mu,4}^1(y)$, $\mu = 1, 2, 3$, und würde einen weiteren Punkt aus $D_2(y) \setminus \{P : P \in C_{\mu,3}^1(y), \mu = 1, 2, 3\}$ enthalten. Somit würde sie zwar $S_q^2(K^*)$ auf $D_3(y)$, nicht aber auf $D_4(y)$, bestimmen, da in $R_4(y)$ die in Bemerkung 8.18 beschriebene Situation vorliegt.

8.2 Minimal bestimmende Mengen von $S_q^2(\Delta)$ auf Kegeln, $q = 5, 6$

Es seien die Teiltriangulierungen $\tilde{\Delta}_K$ und $\tilde{\Delta}_{K^*}$ wie in (8.1) gegeben. K besitze mindestens vier aufeinander folgende Kanten, die von v ausgehen und paarweise nicht kollinear sind. Ferner sei K^* ein Kegel, der durch einen oder zwei Clough-Tochter-Splits so modifiziert worden ist, dass von v genau vier aufeinander folgende Kanten mit paarweise verschiedener Steigung ausgehen. Im Folgenden konstruieren wir für $q = 5, 6$ unter Verwendung unserer Resultate aus Abschnitt 8.1 allgemeine Klassen minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ und $S_q^2(\tilde{\Delta}_{K^*})$. Dabei gehen wir davon aus, dass $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ und $S_q^2(\tilde{\Delta}_{K^*})$ bereits auf $\mathcal{B}_q(\tilde{\Delta})$ eindeutig bestimmt sind.

Wir betrachten zunächst $\tilde{\Delta}_K$. Unter Verwendung der in den Abschnitten 8.1.1 und 8.1.2 definierten Klassen minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ auf Teilmengen von $\mathcal{B}_q(K)$ konstruieren wir eine allgemeine Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$. Dabei gehen wir wie folgt vor. Unter der Voraussetzung, dass $S_q^2(\tilde{\Delta})$ bereits bestimmt ist, wählen wir zunächst eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ auf $D_4(v)$. Anschließend wählen wir weitere BB-Punkte aus den C^2 -Mengen entlang der inneren Kanten von K .

Die Mengen $\mathcal{M}_{4,(1,\lambda)}^2(v)$, $\mathcal{M}_{5,q}^2(e_l)$ und $\tilde{\mathcal{M}}_{5,q}^2(e_l)$ seien wie in Abschnitt 8.1.1 bzw. wie in Abschnitt 8.1.2 gegeben.

Konstruktion minimal bestimmender Mengen:

Die Mengen $\mathcal{A}_l \subset \mathcal{B}_q(K)$, $l = 0, \dots, \lambda$, seien wie folgt gewählt:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &\in \mathcal{M}_{4,(1,\lambda)}^2(v), \\ \mathcal{A}_l &\in \begin{cases} \mathcal{M}_{5,q}^2(e_l), & \text{falls } e_l \text{ bzgl. } v \text{ degeneriert ist,} \\ \tilde{\mathcal{M}}_{5,q}^2(e_l), & \text{sonst,} \end{cases} \quad l = 1, \dots, \lambda. \end{aligned}$$

Für $q = 5$ sei $\mathcal{M} := \emptyset$. Für $q = 6$ setzen wir $\mathcal{M} := \{P_{0,3,3}^{[l]} : l = 1, \dots, \lambda + 1\}$. Dann definieren wir

$$\mathcal{A}_K := \bigcup_{l=0}^{\lambda} \mathcal{A}_l \cup \mathcal{M}. \quad (8.33)$$

Sei $\tilde{\mathcal{A}}$ eine beliebige minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\tilde{\Delta})$.

Theorem 8.19. *Sei $q \in \{5, 6\}$ und sei \mathcal{A}_K von der in (8.33) gegebenen Form. Dann ist $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}} \cap \mathcal{A}_K$ eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$.*

Beweis. Sei $q \in \{5, 6\}$ und es gelte $s \in S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$. Wir zeigen zunächst, dass \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ ist. Es gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}$. Dann ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_q(\tilde{\Delta}_K)$ gilt. Nach Voraussetzung folgt direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_q(\tilde{\Delta})$. Offensichtlich gilt $\mathcal{B}_q(K) = R_2(K) \cup \mathcal{M} \cup D_4^*(v) \cup (\bigcup_{l=1}^{\lambda} R_2(e_l))$, wobei $D_4^*(v)$ wie in (8.8) und $R_2(e_l)$ wie in (8.15) gegeben ist. Aus den C^1 - und C^2 -Stetigkeitsbedingungen an den Randkanten von $\tilde{\Delta}$ und am Eckpunkt v erhalten wir $\lambda_P s = 0$, $P \in R_2(K)$. Aus Lemma 8.10 folgt dann ferner $\lambda_P s = 0$, $P \in D_4^*(v)$. Aus Lemma 8.12 und Korollar 8.13 erhalten wir schließlich, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_q(K)$ gilt.

Es bleibt zu zeigen, dass \mathcal{A} minimal ist. Für $q = 5$ gilt nach Konstruktion von \mathcal{A} und mit Korollar 8.2 $|\mathcal{A}| = |\tilde{\mathcal{A}}| + |\mathcal{A}_K| = \dim S_5^2(\tilde{\Delta}) + 6\lambda - 3 = \dim S_5^2(\tilde{\Delta}_K)$. Für $q = 6$ folgt ebenfalls aus Korollar 8.2, dass $|\mathcal{A}| = |\tilde{\mathcal{A}}| + |\mathcal{A}_K| = \dim S_6^2(\tilde{\Delta}) + 10\lambda - 2 = \dim S_6^2(\tilde{\Delta}_K)$ gilt. In beiden Fällen folgt dann aus Theorem 2.4 die Behauptung. ■

Wir betrachten nun die Triangulierung $\tilde{\Delta}_{K^*}$. Es bezeichne K im Folgenden den Kegel, aus dem K^* durch Unterteilen von gewissen Dreiecken entsteht. Es sei zunächst der Fall gegeben, dass K genau drei aufeinander folgende Kanten besitzt, die von v ausgehen und die paarweise nicht kollinear sind. D.h. es gilt $\lambda \leq 4$, und die inneren Kanten von K sind nicht alle bzgl. v degeneriert. Dann genügt es offensichtlich, ein Dreieck $T^{[l^*]}$ von K durch einen Clough-Tochter-Split zu unterteilen, und wir können $T^{[l^*]}$ so wählen, dass $l^* \in \{1, \dots, \lambda - 1\}$ gilt. y_{l^*} sei der Schwerpunkt von $T^{[l^*]}$, der im Inneren von $T^{[l^*]}$ hinzugefügt wird. Die Eckpunkte und Dreiecke von $T^{[l^*]}$ seien für $l = l^*$ wie in Abbildung 8.5 bezeichnet. Somit gilt

$$K^* := \{T^{[l]} : l = 1, \dots, \lambda + 1, l \neq l^*\} \cup \{T^{[l^*, \mu]} : \mu = 1, 2, 3\}. \quad (8.34)$$

Der Kegel $K^* \setminus T^{[l, 3]}$ besitzt $(\lambda + 1)$ innere Kanten $e_1, \dots, e_{l^*}, e_{l^*+1}, \dots, e_\lambda$. Für $K^* \setminus T^{[l, 3]}$ sei die Menge $\mathcal{M}_{4, (1, \lambda+1)}^2(v)$ wie in Abschnitt 8.1.1 definiert. Ferner seien für $l = 1, \dots, \lambda, l \neq l^*$, die Mengen $\mathcal{M}_{5, q}^2(e_l)$ und $\tilde{\mathcal{M}}_{5, q}^2(e_l)$ wie in Abschnitt 8.1.2 gegeben.

Konstruktion minimal bestimmender Mengen:

Die Mengen $\mathcal{A}_l \subset \mathcal{B}_q(K^*)$, $l = 0, \dots, \lambda$, seien wie folgt gewählt:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &\in \mathcal{M}_{4, (1, \lambda+1)}^2(v), \\ \mathcal{A}_l &\in \begin{cases} \mathcal{M}_{5, q}^2(e_l), & \text{falls } e_l \text{ bzgl. } v \text{ degeneriert ist,} \\ \tilde{\mathcal{M}}_{5, q}^2(e_l), & \text{sonst,} \end{cases} \quad l = 1, \dots, \lambda, l \neq l^*. \end{aligned}$$

Für $q = 5$ genüge die Menge \mathcal{A}_{l^*} einem der folgenden beiden Fälle.

Fall 1: Sei $\mathcal{A}_{v_{l^*}}$ eine minimal bestimmende Menge von $S_5^2(\tilde{\Delta}_{K^*})$ auf $D_2(v_{l^*}) \cap \mathcal{B}_5(K^*)$, und es gelte ferner $|\mathcal{A}_{v_{l^*}} \cap C_{l^*, 4}^1(v)| = 3$. \mathcal{A}_{l^*} enthalte die folgenden BB-Punkte:

(8.35) die BB-Punkte aus $\mathcal{A}_{v_{l^*}} \setminus C_{l^*, 4}^1(v)$ und entweder

(8.36) einen BB-Punkt aus $\{P_{3, 2, 0}^{[l^*, 3]}, P_{2, 2, 1}^{[l^*, 3]}, P_{1, 2, 2}^{[l^*, 3]}, P_{2, 1, 2}^{[l^*, 3]}, P_{3, 0, 2}^{[l^*, 3]}\}$ oder

(8.37) den BB-Punkt $P_{0, 5, 0}^{[l^*, 1]}$.

Fall 2: Es sei $\mathcal{A}_{y_{l^*}} \in \mathcal{M}_3^2(\Delta_{y_{l^*}})$ so gegeben, dass $\{P_{2, 3, 0}^{[l^*, 1]}, P_{1, 3, 1}^{[l^*, 1]}, P_{1, 4, 0}^{[l^*, 1]}, P_{i, 2, k}^{[l^*, 1]} : i + k = 3\} \subset \mathcal{A}_{y_{l^*}}$ gilt. \mathcal{A}_{l^*} enthalte die folgenden BB-Punkte:

(8.38) die BB-Punkte der Menge $\mathcal{A}_{y_{l^*}} \setminus \{P_{2, 3, 0}^{[l^*, 1]}, P_{1, 3, 1}^{[l^*, 1]}, P_{1, 4, 0}^{[l^*, 1]}, P_{i, 2, k}^{[l^*, 1]} : i + k = 3\}$ und

(8.39) einen BB-Punkt aus $\{P_{0, 5, 0}^{[l^*, 3]}, P_{0, 4, 1}^{[l^*, 3]}, P_{0, 3, 2}^{[l^*, 3]}, P_{0, 1, 4}^{[l^*+1]}, P_{0, 2, 3}^{[l^*+1]}\}$.

Für $q = 6$ sei $\mathcal{A}_{v_{l^*}}$ eine minimal bestimmende Menge von $S_6^2(\tilde{\Delta}_{K^*})$ auf $D_2(v_{l^*}) \cap \mathcal{B}_6(K^*)$ und es gelte $P_{4, 0, 2}^{[l^*+1]} \in \mathcal{A}_{v_{l^*}}$. Ferner sei eine Menge $\mathcal{A}_{y_{l^*}} \in \mathcal{M}_3^2(\Delta_{y_{l^*}})$ so gegeben, dass $\{P_{3, 3, 0}^{[l^*, 1]}, P_{2, 3, 1}^{[l^*, 1]}, P_{2, 4, 0}^{[l^*, 1]}\} \subset \mathcal{A}_{y_{l^*}}$ gilt. \mathcal{A}_{l^*} enthalte die folgenden BB-Punkte:

(8.40) die BB-Punkte der Menge $\mathcal{A}_{v_{l^*}} \setminus \{P_{4,0,2}^{[l^*+1]}\}$ und

(8.41) die BB-Punkte der Menge $\mathcal{A}_{y_{l^*}} \setminus \{P_{3,3,0}^{[l^*,1]}, P_{2,3,1}^{[l^*,1]}, P_{2,4,0}^{[l^*,1]}\}$.

Für $q = 5$ sei $\mathcal{M} := \emptyset$. Für $q = 6$ setzen wir $\mathcal{M} := \{P_{0,3,3}^{[l]} : l = 1, \dots, \lambda+1, l \neq l^*\} \cup \{P_{0,3,3}^{[l^*,3]}\}$. Dann definieren wir

$$\mathcal{A}_{K^*} := \bigcup_{l=0}^{\lambda} \mathcal{A}_l \cup \mathcal{M}. \quad (8.42)$$

Sei $\tilde{\mathcal{A}}$ eine beliebige minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\tilde{\Delta})$.

Theorem 8.20. *Sei $q \in \{5, 6\}$ und sei \mathcal{A}_{K^*} von der in (8.42) gegebenen Form. Dann ist $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}} \cup \mathcal{A}_{K^*}$ eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\tilde{\Delta}_{K^*})$.*

Beweis. Sei $q \in \{5, 6\}$ und es gelte $s \in S_q^2(\tilde{\Delta}_{K^*})$. Ist s in der BB-Darstellung (2.5) gegeben, bezeichne $a_{i,j,k}^{[l]}$, $i+j+k=q$, die Bézier-Koeffizienten von $s|_{T^{[l]}}$, $l = 1, \dots, \lambda+1$, $l \neq l^*$. Ferner seien $a_{i,j,k}^{[l^*,\mu]}$, $i+j+k=q$, die Bézier-Koeffizienten von $s|_{T^{[l^*,\mu]}}$, $\mu = 1, 2, 3$. Wir zeigen zunächst, dass \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_q^2(\tilde{\Delta}_{K^*})$ ist. Es gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}$. Nach Voraussetzung folgt direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_q(\tilde{\Delta})$. Aus den C^1 - und C^2 -Stetigkeitsbedingungen an den Randkanten von $\tilde{\Delta}$ und am Eckpunkt v erhalten wir $\lambda_P s = 0$, $P \in R_2(K)$. Nach Konstruktion sind die Kanten $e_{l^*-1}, e_{l^*,1}, e_{l^*}, e_{l^*+1}$ von K^* paarweise nicht kollinear. Nach Definition von $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ folgt dann aus Lemma 8.10

$$\lambda_P s = 0, \quad P \in D_4^*(v). \quad (8.43)$$

Für $l = 1, \dots, \lambda$, $l \neq l^*$, gilt somit insbesondere $\lambda_P s = 0$, $P \in C_{l,4}^1(v)$, falls e_l bzgl. v nicht degeneriert ist. Wegen $\mathcal{A}_l \subset \mathcal{A}$ folgt dann aus Korollar 8.13 oder Lemma 8.12 $\lambda_P s = 0$, $P \in C_{l,p}^2(v)$ für $l = 1, \dots, \lambda$, $l \neq l^*$, und $5 \leq p \leq q$. Wir erhalten somit $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_q(T^{[l]})$, für $l = 1, \dots, \lambda+1$, $l \neq l^*, l^*+1$. Es bleibt zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_q(\Delta_{y_{l^*}}) \cup \mathcal{B}_q(T^{[l^*+1]})$ gilt. Wir betrachten zunächst den Fall $q = 5$.

Fall 1: \mathcal{A}_{l^*} enthält entweder die BB-Punkte (8.35) und (8.36) oder die BB-Punkte (8.35) und (8.37). Mit (8.43) und wegen $\mathcal{A}_{l^*} \subset \mathcal{A}$ folgt direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in D_2(v_{l^*})$. Somit bleibt zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_5(T^{[l^*,3]})$, gilt. Enthält \mathcal{A}_{l^*} den BB-Punkt (8.36), dann folgt aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen an den Kanten $e_{l^*,2}$ und $e_{l^*,3}$ zunächst $a_{3,2,0}^{[l^*,3]} = a_{2,2,1}^{[l^*,3]} = a_{1,1,2}^{[l^*,3]} = a_{2,1,1}^{[l^*,3]} = a_{3,0,2}^{[l^*,3]} = 0$. Aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen auf $D_2(v_{l^*})$ folgt dann bereits $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_5(T^{[l^*,3]})$. Es sei nun der Fall gegeben, dass \mathcal{A}_{l^*} statt des BB-Punkts (8.36) den BB-Punkt $P_{0,5,0}^{[l^*,1]}$ in (8.37) enthält. Betrachten wir die BB-Punkte von $T^{[l^*,3]}$, so ergibt sich aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen an den Kanten

$e_{l^*,2}$ und $e_{l^*,3}$ das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot a = 0$$

mit $a = (a_{3,2,0}^{[l^*,3]}, a_{2,2,1}^{[l^*,3]}, a_{1,2,2}^{[l^*,3]}, a_{2,1,2}^{[l^*,3]}, a_{3,0,2}^{[l^*,3]}, a_{4,1,0}^{[l^*,3]}, a_{3,1,1}^{[l^*,3]}, a_{4,0,1}^{[l^*,3]})^T$. Bezeichnen wir die obige Matrix mit M , so gilt $\det M = -2916$. Das Gleichungssystem hat somit nur die triviale Lösung, und es folgt $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_5(T^{[l^*,3]})$.

Fall 2: \mathcal{A}_{l^*} enthält die BB-Punkte (8.38) und (8.39). Mit (8.43) folgt aus Lemma 8.15 direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in D_3(y_{l^*})$. Somit gilt insbesondere $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_5(T^{[l^*,1]})$. Aus der C^2 -Stetigkeitsbedingung an der Kante $e_{l^*,3}$ folgt dann $a_{1,2,2}^{[l^*,3]} = 0$. Aus der C^2 -Stetigkeitsbedingung an der Kante $e_{l^*,2}$ erhalten wir ferner $\lambda_P s = 0$, $P \in C_{(l^*,2),4}^2(y_{l^*})$. Mit (8.39) folgt dann aus Lemma 8.5 bereits $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_5(\Delta_{y_{l^*}}) \cup \mathcal{B}_5(T^{[l^*,1]})$.

Sei nun $q = 6$. Nach Definition von $\mathcal{A}_{l^*} \subset \mathcal{A}$ folgt aus Lemma 8.15 $\lambda_P s = 0$, $P \in D_3(y_{l^*}) \cup D_2(v_{l^*})$. Somit gilt insbesondere $\lambda_P s = 0$, $P \in T^{[l^*,1]}$. Aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen an den Kanten $e_{l^*,2}$ und $e_{l^*,3}$ folgt $a_{2,2,2}^{[l^*,2]} = a_{2,2,2}^{[l^*,3]} = a_{1,2,3}^{[l^*,3]} = 0$. Aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen an den Kanten $e_{l^*,3}$ und e_{l^*} erhalten wir ferner $\lambda_P s = 0$, $P \in C_{(l^*,3),4}^2(y) \cup C_{l^*,4}^2(v)$. Somit gilt insbesondere $\lambda_P s = 0$, $P \in T^{[l^*,2]}$, so dass wir wiederum aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen an den Kanten $e_{l^*,3}$ und e_{l^*} $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_6(K^*) \setminus \{P_{0,4,2}^{[l^*,3]}, P_{0,2,4}^{[l^*,1]}\}$ erhalten. Wegen $\{P_{0,4,2}^{[l^*,3]}, P_{0,2,4}^{[l^*,1]}\} \subset \mathcal{A}$ folgt schließlich $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_6(K^*)$.

Es bleibt zu zeigen, dass \mathcal{A} minimal ist. Für $q = 5$ gilt nach Konstruktion von \mathcal{A} und mit Korollar 8.3 $|\mathcal{A}| = |\tilde{\mathcal{A}}| + |\mathcal{A}_{K^*}| = \dim S_5^2(\tilde{\Delta}) + 6\lambda + 1 = \dim S_5^2(\tilde{\Delta}_{K^*})$. Für $q = 6$ folgt ebenfalls aus Korollar 8.3 $|\mathcal{A}| = |\tilde{\mathcal{A}}| + |\mathcal{A}_{K^*}| = \dim S_6^2(\tilde{\Delta}) + 10\lambda + 7 = \dim S_6^2(\tilde{\Delta}_{K^*})$. Aus Theorem 2.4 folgt somit die Behauptung. \blacksquare

Wir betrachten nun den Fall, dass alle inneren Kanten von K bzgl. v degeneriert sind, d. h. v semisingulär ist. In diesem Fall enthält der modifizierte Kegel genau zwei Clough-Tochter-Dreiecke. Es bezeichne K^* im Folgenden den Kegel, der entsteht, wenn wir sowohl für den Fall $\lambda = 1$ als auch für den Fall $\lambda = 2$ die Dreiecke $T^{[1]}$ und $T^{[2]}$ von K durch einen Clough-Tochter-Split unterteilen. D. h. es gilt

$$\begin{aligned} K^* &= (\cup_{\mu=1}^3 T^{[1,\mu]}) \cup (\cup_{\mu=1}^3 T^{[2,\mu]}) \quad \text{bzw.} \\ K^* &= (\cup_{\mu=1}^3 T^{[1,\mu]}) \cup (\cup_{\mu=1}^3 T^{[2,\mu]}) \cup T^{[3]}. \end{aligned} \tag{8.44}$$

Der Kegel $K^* \setminus (T^{[1,3]} \cup T^{[2,3]})$ besitzt somit $(\lambda+2)$ innere Kanten. Für $K^* \setminus (T^{[1,3]} \cup T^{[2,3]})$ seien die Mengen $\mathcal{M}_{3,(1,\lambda+2)}^2(v)$ und $\mathcal{M}_{4,(1,\lambda+2)}^2(v)$ wie in Abschnitt 8.1.1 definiert. Ferner seien für $l = 1, 2$ die Mengen $\mathcal{M}_2^2(\Delta_{y_l})$ und $\mathcal{M}_4^2(\Delta_{y_l})$ wie in Abschnitt 8.1.3 gegeben.

Wir konstruieren im Folgenden für $q = 5, 6$ Klassen minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\tilde{\Delta}_{K^*})$.

Konstruktion minimal bestimmender Mengen:

Für $q = 5$ und $l = 0, \dots, \lambda$ seien die Mengen $\mathcal{A}_l \subset \mathcal{B}_q(K^*)$ wie in einem der folgenden beiden Fälle gewählt.

Fall 1: Es sei $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{M}_{3,(1,\lambda+2)}^2(v)$ und es sei $\mathcal{A}_2 = \{P_{i,j,k}^{[3]} : k \geq 3, (i, j, k) \neq (2, 0, 3)\}$, falls $\lambda = 2$ gilt. Für $l = 1, 2$ sei eine Menge $\mathcal{A}_{y_l} \in \mathcal{M}_2^2(\Delta_{y_l})$ so gegeben, dass $P_{2,3,0}^{[l,1]} \in \mathcal{A}_{y_l}$ gilt. \mathcal{A}_1 enthalte für $l_1, l_2 \in \{1, 2\}$, $l_1 \neq l_2$, die folgenden BB-Punkte:

(8.45) drei nicht kollineare BB-Punkte aus $D_1(v_1) \cap \mathcal{B}_5(K^*)$,

(8.46) die BB-Punkte der Menge $\mathcal{A}_{y_{l_1}} \setminus \{P_{2,3,0}^{[l_1,1]}\}$ und

(8.47) die BB-Punkte $P_{1,4,0}^{[l_2,1]}$ und $P_{0,5,0}^{[l_2,1]}$.

Fall 2: Es sei $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{M}_{4,(1,\lambda+2)}^2(v)$ und es sei $\mathcal{A}_2 = \{P_{0,2,3}^{[3]}, P_{0,1,4}^{[3]}, P_{0,0,5}^{[3]}\}$, falls $\lambda = 2$ gilt. Für $l = 1, 2$ sei die Menge M_{y_l} gegeben durch

$$M_{y_l} = \{P_{3,2,0}^{[l,3]}, P_{2,2,1}^{[l,3]}, P_{1,2,2}^{[l,3]}, P_{2,1,2}^{[l,3]}, P_{3,0,2}^{[l,3]}\}.$$

Ferner sei \mathcal{A}_{v_1} eine minimal bestimmende Menge von $S_5^2(\tilde{\Delta}_{K^*})$ auf $D_2(v_1) \cap \mathcal{B}_5(K^*)$, so dass $\{P_{2,3,0}^{[1,2]}, P_{1,4,0}^{[1,2]}, P_{1,3,1}^{[1,2]}\} \subset \mathcal{A}_{v_1}$ gilt. \mathcal{A}_1 enthalte die folgenden BB-Punkte:

(8.48) die BB-Punkte der Menge $\mathcal{A}_{v_1} \setminus \{P_{2,3,0}^{[1,2]}, P_{1,4,0}^{[1,2]}, P_{1,3,1}^{[1,2]}\}$ und

(8.49) je einen BB-Punkt aus M_{y_1} und M_{y_2} .

Für $q = 6$ und $l = 0, \dots, \lambda$ seien die Mengen $\mathcal{A}_l \subset \mathcal{B}_q(K^*)$ wie folgt gegeben. Es sei $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{M}_{4,(1,\lambda+2)}^2(v)$ und es sei $\mathcal{A}_2 \in \tilde{\mathcal{M}}_{5,6}^2(e_2)$, falls $\lambda = 2$ gilt. Wir definieren

$$\begin{aligned} M_{y_1} &:= \{P_{i,2,k}^{[1,1]} : i+k=4\} \cup \{P_{3,3,0}^{[1,1]}, P_{2,4,0}^{[1,1]}, P_{2,3,1}^{[1,1]}\}, \\ M_{y_2} &:= \{P_{i,j,2}^{[2,2]} : i+j=4\} \cup \{P_{3,0,3}^{[2,2]}, P_{2,0,4}^{[2,2]}, P_{2,1,3}^{[2,2]}\}. \end{aligned}$$

Dann sei für $l = 1, 2$ eine Menge $\mathcal{A}_{y_l} \in \mathcal{M}_4^2(\Delta_{y_l})$ so gegeben, dass $M_{y_l} \subset \mathcal{A}_{y_l}$ gilt. \mathcal{A}_1 enthalte die folgenden BB-Punkte:

(8.50) die BB-Punkte der Menge $\mathcal{A}_{y_l} \setminus M_{y_l}$ für $l = 1, 2$ und

(8.51) die BB-Punkte $P_{1,5,0}^{[1,2]}$ und $P_{0,6,0}^{[1,2]}$.

Für $q = 5$ sei $\mathcal{M} := \emptyset$. Für $q = 6$ setzen wir $\mathcal{M} := \{P_{0,3,3}^{[1,3]}, P_{0,3,3}^{[2,3]}\}$, falls $\lambda = 1$ gilt, und $\mathcal{M} := \{P_{0,3,3}^{[1,3]}, P_{0,3,3}^{[2,3]}, P_{0,3,3}^{[3]}\}$, falls $\lambda = 2$ gilt. Dann definieren wir

$$\mathcal{A}_{K^*} := \cup_{l=0}^{\lambda} \mathcal{A}_l \cup \mathcal{M}. \quad (8.52)$$

Sei $\tilde{\mathcal{A}}$ eine beliebige minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\tilde{\Delta})$.

Theorem 8.21. *Sei $q \in \{5, 6\}$ und sei \mathcal{A}_{K^*} von der in (8.52) gegebenen Form. Dann ist $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}} \cup \mathcal{A}_{K^*}$ eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\tilde{\Delta}_{K^*})$.*

Beweis. Sei $q \in \{5, 6\}$ und es gelte $s \in S_q^2(\tilde{\Delta}_{K^*})$. Ist s in der BB-Darstellung (2.5) gegeben, seien für $l = 1, 2$ und $\mu = 1, 2, 3$ die Bézier-Koeffizienten von $s|_{T^{[l,\mu]}}$ mit $a_{i,j,k}^{[l,\mu]}$, $i + j + k = q$, bezeichnet. Gilt $\lambda = 2$, dann seien $a_{i,j,k}^{[3]}$, $i + j + k = q$, die Bézier-Koeffizienten von $s|_{T^{[3]}}$. Wir zeigen zunächst, dass \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_q^2(\tilde{\Delta}_{K^*})$ ist. Es gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}$. Dann ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_q(\tilde{\Delta}_{K^*})$ gilt. Nach Voraussetzung folgt direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_q(\tilde{\Delta})$. Aus den C^1 - und C^2 -Stetigkeitsbedingungen an den Randkanten von $\tilde{\Delta}$ und am Eckpunkt v erhalten wir $\lambda_P s = 0$, $P \in R_2(K)$. Wir betrachten zunächst den Fall $q = 5$.

Fall 1: Es gilt $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{M}_{3,(1,\lambda+2)}^2(v)$, und \mathcal{A}_1 enthält für $l_1, l_2 \in \{1, 2\}$, $l_1 \neq l_2$, die BB-Punkte (8.45) bis (8.47). Für $\lambda = 2$ gilt ferner $\mathcal{A}_2 = \{P_{i,j,k}^{[3]} : k \geq 3, (i, j, k) \neq (2, 0, 3)\}$. Nach Definition von $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ folgt aus Lemma 8.8 $\lambda_P s = 0$, $P \in D_3(v)$. Für $\lambda = 2$ folgt wegen $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$, dass $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_5(T^{[3]})$, gilt. Aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen am Eckpunkt v_2 sowie an der Kante e_2 erhalten wir ferner $\lambda_P s = 0$, $P \in D_2(v_2) \cup \{P_{1,2,2}^{[2,2]}, P_{2,1,2}^{[2,2]}, P_{2,2,1}^{[2,2]}\}$. Da \mathcal{A} die BB-Punkte (8.45) enthält, folgt $\lambda_P s = 0$, $P \in D_1(v_1)$. O.B.d.A. gelte $l_1 = 1$ und $l_2 = 2$. Da \mathcal{A} die BB-Punkte (8.46) enthält, folgt dann aus Lemma 8.14 $\lambda_P s = 0$, $P \in D_2(y_1)$. Somit gilt insbesondere $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_5(T^{[1,1]})$. Aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen an den Kanten $e_{1,\mu}$, $\mu = 1, 2, 3$, erhalten wir ferner $\lambda_P s = 0$, $P \in D_3(y_1) \cup \{P_{1,2,2}^{[1,3]}\}$. Da, wie bereits gezeigt, $a_{1,4,0}^{[1,2]} = a_{2,2,1}^{[1,2]} = 0$ gilt, folgt aus der C^2 -Stetigkeitsbedingung an $e_{1,2}$, dass $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_5(\Delta_{y_1})$, gilt. Aus der C^2 -Stetigkeitsbedingung an der Kante e_2 folgt ferner $a_{1,2,2}^{[1,2]} = a_{2,1,2}^{[1,2]} = a_{2,2,1}^{[1,2]} = 0$. Wegen $P_{1,4,0}^{[2,1]} \in \mathcal{A}$ erhalten wir $\lambda_P s = 0$, $P \in D_4(v)$. Betrachten wir nun die BB-Punkte auf $T^{[2,3]}$, so folgt analog zum Beweis von Theorem 8.21, Fall 1, für $q = 5$, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_5(K^*)$ gilt. Für $l_1 = 2$ und $l_2 = 1$ folgt die Behauptung analog.

Fall 2: Es gilt $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{M}_{4,(1,\lambda+2)}^2(v)$ und \mathcal{A}_1 enthält die BB-Punkte (8.48) und (8.49). Für $\lambda = 2$ gilt ferner $\mathcal{A}_2 = \{P_{0,2,3}^{[3]}, P_{0,1,4}^{[3]}, P_{0,0,5}^{[3]}\}$. Nach Definition von $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ folgt aus Lemma 8.10 direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in D_4(v)$. Für $\lambda = 2$ erhalten wir wegen $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ aus Lemma 8.12 $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_5(T^{[3]})$. Aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen an den

Eckpunkten v_0 und v_2 erhalten wir ferner $\lambda_P s = 0$, $P \in D_2(v_0) \cup D_2(v_2)$. Da \mathcal{A} die BB-Punkte (8.48) enthält, folgt $\lambda_P s = 0$, $P \in D_2(v_1)$. \mathcal{A} enthält ferner die BB-Punkte (8.49). Wir erhalten somit analog zum Beweis von Theorem 8.20, dass $\lambda_P s = 0$, $P \in D_3(y_1) \cup D_3(y_2)$, gilt. Aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen an den Kanten $e_{1,3}$ und $e_{2,2}$ folgt dann $a_{1,2,2}^{[1,3]} = a_{1,2,2}^{[2,3]} = 0$. Somit gilt $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_5(K^*)$.

Sei nun $q = 6$. Analog zum Fall 2 für $q = 5$ erhalten wir $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in D_4(v) \cup \mathcal{B}_6(T^{[3]})$ und für alle $P \in D_2(v_0) \cup D_2(v_2)$. Aus Lemma 8.17 folgt ferner $\lambda_P s = 0$, $P \in D_4(y_1) \cup D_4(y_2)$. Somit gilt insbesondere $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_6(T^{[1,1]} \cup T^{[2,2]})$. Aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen auf $C_{1,5}^2(v)$ und $C_{1,6}^2(v)$ erhalten wir dann $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_6(T^{[1,2]} \cup T^{[2,1]})$. Aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen an den Kanten $e_{1,2}$ und $e_{2,3}$ sowie wegen $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ folgt dann $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_6(K^*)$.

Es bleibt zu zeigen, dass \mathcal{A} minimal ist. Für $q = 5$ gilt nach Konstruktion von \mathcal{A} und mit Korollar 8.3 $|\mathcal{A}| = |\tilde{\mathcal{A}}| + |\mathcal{A}_{K^*}| = \dim S_5^2(\tilde{\Delta}) + 6\lambda + 5 = \dim S_5^2(\tilde{\Delta}_{K^*})$. Für $q = 6$ folgt ebenfalls aus Korollar 8.3 $|\mathcal{A}| = |\tilde{\mathcal{A}}| + |\mathcal{A}_{K^*}| = \dim S_6^2(\tilde{\Delta}) + 10\lambda + 16 = \dim S_6^2(\tilde{\Delta}_{K^*})$. In beiden Fällen folgt dann mit Theorem 2.4 die Behauptung. ■

8.3 Minimal bestimmende Mengen von $S_q^2(\Delta)$ auf Kegeln, $q \geq 7$

Gegeben sei eine Teiltriangulierung $\tilde{\Delta} \subset \Delta$, und es sei $v \in V_I$ ein beliebiger Randpunkt von $\tilde{\Delta}$. Es bezeichne K den Kegel von v bzgl. $\tilde{\Delta}$. In diesem Abschnitt konstruieren wir allgemeine Klassen minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ für $q \geq 7$. Dabei setzen wir voraus, dass $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ bereits auf $\mathcal{B}_q(\tilde{\Delta}) \cup R_{2,3}(K)$ eindeutig bestimmt ist, wobei $R_{2,3}(K)$ wie in (8.4) gegeben ist, falls v bzgl. $\tilde{\Delta}$ nicht semisingulär vom Typ II ist, bzw. anderenfalls wie in (8.5). Für $q = 7$ betrachten wir ferner den Fall, dass K^* ein durch ein Clough-Tocher-Split modifizierter Fill ist, und konstruieren bestimmende Mengen von $S_7^2(K^*)$.

Es sei K zunächst ein Kegel, der die Eigenschaft besitzt, dass mindestens vier aufeinander folgende Kanten, die vom Scheitelpunkt v des Kegels ausgehen, paarweise nicht kollinear sind. Wir gehen bei der Konstruktion minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ für $q \geq 7$ analog zur Vorgehensweise bei der Charakterisierung minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$ für $q = 5$ oder $q = 6$ (Theorem 8.19) vor. Die Mengen $\mathcal{M}_{4,(1,\lambda)}^2(v)$, $\mathcal{M}_{5,q}^2(e_l)$ und $\tilde{\mathcal{M}}_{5,q}^2(e_l)$, $l = 1, \dots, \lambda$, seien wie in Abschnitt 8.1.1 bzw. wie in Abschnitt 8.1.2 gegeben.

Konstruktion minimal bestimmender Mengen:

Für $l = 0, \dots, \lambda$ seien die Mengen $\mathcal{A}_l \subset \mathcal{B}_q(K)$ wie folgt gewählt:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &\in \mathcal{M}_{4,(1,\lambda)}^2(v), \\ \mathcal{A}_l &\in \begin{cases} \mathcal{M}_{5,q}^2(e_l), & \text{falls } e_l \text{ bzgl. } v \text{ degeneriert ist,} \\ \tilde{\mathcal{M}}_{5,q}^2(e_l), & \text{sonst,} \end{cases} \quad l = 1, \dots, \lambda. \end{aligned}$$

Dann definieren wir

$$\mathcal{A}_K := \cup_{l=0}^{\lambda} \mathcal{A}_l \cup \{P_{i,j,k}^{[l]} \mid i, j, k \geq 3, l = 1, \dots, \lambda + 1\}. \quad (8.53)$$

Es sei $\tilde{\mathcal{A}}$ eine beliebige minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\tilde{\Delta})$.

Theorem 8.22. *Sei $q \geq 7$ und sei \mathcal{A}_K von der in (8.53) gegebenen Form. Dann ist $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}} \cup \mathcal{A}_K$ eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\tilde{\Delta}_K)$.*

Beweis. Die Behauptung folgt analog zum Beweis von Theorem 8.19. ■

Sei nun K ein beliebiger Kegel mit λ inneren Kanten, $\lambda \geq 1$. Wir konstruieren im Folgenden eine allgemeine Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(K)$. Dabei setzen wir voraus, dass $S_q^2(K)$ auf $R_{2,3}(K)$ bereits eindeutig bestimmt ist. Wir bestimmen $S_q^2(K)$ zunächst auf $D_4(v)$. Anschließend bestimmen wir $S_q^2(K)$ auf den restlichen BB-Punkten in $\mathcal{B}_q(K)$, wobei wir die Charakterisierung minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(K)$ auf den C^2 -Mengen entlang der inneren Kanten von K aus Abschnitt 8.1.2 verwenden. Die Kanten, Eckpunkte und Dreiecke von K seien wie in Abbildung 4.1 bezeichnet. Sind alle inneren Kanten von K bzgl. v degeneriert, dann ist offensichtlich mindestens eine der beiden Kanten e_0 und $e_{\lambda+1}$ bzgl. v nicht degeneriert.

Konstruktion minimal bestimmender Mengen:

Für $l = 1, \dots, \lambda$ sei \mathcal{A}_{v_l} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(K)$ auf $D_3(v_l) \cap \mathcal{B}_q(K)$. Die Menge \mathcal{A}_0 sei wie in einem der folgenden beiden Fälle gegeben.

Fall 1: Die inneren Kanten von K sind nicht alle bzgl. v degeneriert. Es sei $\tilde{l} \in \{1, \dots, \lambda\}$ so gegeben, dass $e_{\tilde{l}}$ bzgl. v nicht degeneriert ist. Für $q = 7$ enthalte die Menge \mathcal{A}_0 die folgenden BB-Punkte:

- für $1 \leq l < \tilde{l}$ einen BB-Punkt aus $\{P_{3,3,1}^{[l]}, P_{3,1,3}^{[l+1]}, P_{3,2,2}^{[l+1]}\}$, falls e_l bzgl. v nicht degeneriert ist, und
- für $\tilde{l} < l \leq \lambda$ einen BB-Punkt aus $\{P_{3,2,2}^{[l]}, P_{3,3,1}^{[l]}, P_{3,1,3}^{[l+1]}\}$, falls e_l bzgl. v nicht degeneriert ist.

Für $q \geq 8$ enthalte \mathcal{A}_0 die folgenden BB-Punkte:

- für $1 \leq l < \tilde{l}$ zwei BB-Punkte aus $\{P_{q-4,3,1}^{[l]}, P_{q-4,4,0}^{[l]}, P_{q-4,1,3}^{[l+1]}, P_{q-4,2,2}^{[l+1]}\}$, falls e_l bzgl. v nicht degeneriert ist,
- für $\tilde{l} < l \leq \lambda$ zwei BB-Punkte aus $\{P_{q-4,2,2}^{[l]}, P_{q-4,3,1}^{[l]}, P_{q-4,4,0}^{[l]}, P_{q-4,1,3}^{[l+1]}\}$, falls e_l bzgl. v nicht degeneriert ist, und
- einen BB-Punkt aus $\{P_{q-4,3,1}^{[\tilde{l}]}, P_{q-4,4,0}^{[\tilde{l}]}, P_{q-4,1,3}^{[\tilde{l}+1]}\}$.

Fall 2: Die inneren Kanten von K sind alle bzgl. v degeneriert. Für $q \geq 7$ setzen wir $\mathcal{A}_0 := \emptyset$.

Für $l = 0, \dots, \lambda$ seien die Mengen \mathcal{A}_l wie folgt gegeben. Für $q = 7$ enthalte \mathcal{A}_l einen BB-Punkt aus $\{P_{2,3,2}^{[l]}, P_{2,2,3}^{[l+1]}\}$, $l = 1, \dots, \lambda$. Ist e_l bzgl. v degeneriert, dann enthalte \mathcal{A}_l zusätzlich einen BB-Punkt aus $\{P_{3,3,1}^{[l]}, P_{3,1,3}^{[l+1]}\}$. Für $q \geq 8$ und $l = 1, \dots, \lambda$ seien die Mengen \mathcal{A}_l gegeben durch

$$\mathcal{A}_l \in \begin{cases} \tilde{\mathcal{M}}_{5,q}^2(e_l), & \text{falls } e_l \text{ bzgl. } v \text{ nicht degeneriert ist,} \\ \mathcal{M}_{5,q}^2(e_l), & \text{falls } e_l \text{ bzgl. } v \text{ degeneriert ist,} \end{cases}$$

wobei $\mathcal{B}_l \subset \mathcal{A}_l$, $l = 1, \dots, \lambda$, gelte und \mathcal{B}_l wie folgt definiert ist.

$$\mathcal{B}_l := \begin{cases} ((D_3(v_l) \cap \mathcal{B}_q(T^{[l]})) \setminus \{P_{0,q-3,3}^{[l]}\}) \cup \{P_{q-3,3,0}^{[l]}\}, & \text{falls } e_l \text{ bzgl. } v \text{ degeneriert ist,} \\ ((D_3(v_l) \cap \mathcal{B}_q(T^{[l]})) \setminus \{P_{0,q-3,3}^{[l]}\}), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann definieren wir $\mathcal{A}_K \subset \mathcal{B}_q(K)$ durch

$$\mathcal{A}_K := \mathcal{A}_0 \cup (\cup_{l=1}^{\lambda} \mathcal{A}_l \setminus \mathcal{B}_l) \cup (\cup_{l=1}^{\lambda} \mathcal{A}_{v_l}) \cup \mathcal{M} \quad (8.54)$$

mit $\mathcal{M} := \{P_{i,j,k}^{[l]} : j, k \geq 3, (i, j, k) \neq (0, q-3, 3), (0, 3, q-3), l = 1, \dots, \lambda+1\}$.

Sei $\tilde{\mathcal{A}}$ eine beliebige minimal bestimmende Menge von $S_q^2(K)$ auf $R_{2,3}(K)$.

Theorem 8.23. *Sei $q \geq 7$ und sei \mathcal{A}_K von der in (8.54) gegebenen Form. Dann ist $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}} \cup \mathcal{A}_K$ eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(K)$.*

Beweis. Sei $q \geq 7$ und es gelte $s \in S_q^2(K)$. Für $l = 1, \dots, \lambda+1$ sei $s|_{T^{[l]}}$ in der BB-Darstellung (2.5) gegeben. Wir zeigen zunächst, dass \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_q^2(K)$ ist. Es gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}$. Dann ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_q(K)$ gilt. Offensichtlich gilt

$$\mathcal{B}_q(K) = R_{2,3}(K) \cup \mathcal{M} \cup D_4^*(v) \cup (\cup_{l=1}^{\lambda} D_3(v_l)) \cup (\cup_{l=1}^{\lambda} R_2(e_l)),$$

wobei $D_4^*(v)$ wie in (8.8) und $R_2(e_l)$ für $l = 1, \dots, \lambda$ wie in (8.15) gegeben ist. Nach Voraussetzung folgt direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in R_{2,3}(K)$. Wegen $\mathcal{A}_{v_l} \subset \mathcal{A}$, $l = 1, \dots, \lambda$, und

$\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ folgt $\lambda_P s = 0$, $P \in (\cup_{l=1}^{\lambda} D_3(v_l)) \cup \mathcal{M}$. Für $q = 7$ gilt somit insbesondere $a_{4,3,0}^{[l]} = 0$, $l = 1, \dots, \lambda$. Wegen $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ folgt dann aus Lemma 8.10 $\lambda_P s = 0$, $P \in D_4^*(v)$. Wegen $\mathcal{A}_l \subset \mathcal{A}$, $l = 1, \dots, \lambda$, erhalten wir aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen auf $C_{l,5}^2(v)$ bereits $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_7(K)$. Sei nun $q \geq 8$. Dann folgt mit $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ aus Lemma 8.10 direkt, dass $\lambda_P s = 0$, $P \in D_4^*(v)$, gilt. Für $l = 1, \dots, \lambda$ gilt somit insbesondere $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_l$, so dass wegen $\mathcal{A}_l \subset \mathcal{A}$ aus Lemma 8.12 und Korollar 8.13 ebenfalls $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_q(K)$, folgt.

Es bleibt zu zeigen, dass \mathcal{A} minimal ist. Es bezeichne d_v die Anzahl der inneren Kanten von K , die bzgl. v degeneriert sind. Da $\tilde{\mathcal{A}}$ nach Voraussetzung eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(K)$ auf $R_{2,3}(K)$ ist, folgt mit (2.10) offensichtlich

$$|\tilde{\mathcal{A}}| = \begin{cases} \lambda + 6q - 8, & \text{falls } d_v \neq \lambda, \\ \lambda + 6q - 9, & \text{falls } d_v = \lambda. \end{cases}$$

Sind nicht alle inneren Kanten von K bzgl. v degeneriert, folgt nach Konstruktion von \mathcal{A} und mit (2.10)

$$|\mathcal{A}| = |\tilde{\mathcal{A}}| + |\mathcal{A}_K| = \lambda + 6q - 8 + \frac{(q-4)(q-5)}{2} + \lambda \frac{q(q-3)}{2} - 3 = \dim S_q^2(K).$$

Sind alle inneren Kanten von K bzgl. v degeneriert, folgt ebenfalls mit (2.10)

$$|\mathcal{A}| = |\tilde{\mathcal{A}}| + |\mathcal{A}_K| = \lambda + 6q - 9 + \frac{(q-4)(q-5)}{2} + \lambda \frac{q(q-3)}{2} - 2 = \dim S_q^2(K).$$

In beiden Fällen folgt dann mit Theorem 2.4 die Behauptung. ■

Wir betrachten nun den Fall, dass K ein Fill ist, d. h. es gilt $K = T^{[1]}$. In diesem Fall unterteilen wir das Dreieck $T^{[1]}$ durch einen Clough-Tochter-Split, wobei wir als inneren Eckpunkt den Schwerpunkt y_1 von $T^{[1]}$ hinzufügen. Die Teildreiecke von $T^{[1]}$ seien mit $T^{[1,\mu]}$, $\mu = 1, 2, 3$, nummeriert (vgl. Abb. 8.5). Wir bezeichnen den modifizierten Fill mit K^* . Im Folgenden konstruieren wir eine Klasse bestimmender Mengen von $S_7^2(K^*)$, wobei wir wie schon bei der Charakterisierung minimal bestimmender Mengen von $S_7^2(K)$ für einen Kegel K davon ausgehen, dass $S_7^2(K^*)$ auf $R_{2,3}(K^*) := D_3(v) \cup D_3(v_0) \cup D_3(v_1) \cup \{P_{i,j,k}^{[1,1]}, P_{i,k,j}^{[1,2]} : j \leq 2, i + j + k = 7\}$ bereits bestimmt ist.

Die Menge $\mathcal{M}_3^2(\Delta_{y_1})$ sei wie in Abschnitt 8.1.3 gegeben.

Konstruktion bestimmender Mengen:

Es gelte $\mathcal{A}_{y_1} \in \mathcal{M}_3^2(\Delta_{y_1})$. Dann definieren wir

$$\mathcal{A}_{K^*} := \mathcal{A}_{y_1} \cup \{P_{2,3,2}^{[1,1]}, P_{3,2,2}^{[1,3]}, P_{1,3,3}^{[1,3]}\}. \quad (8.55)$$

Es sei $\tilde{\mathcal{A}}$ eine beliebige minimal bestimmende Menge von $S_q^2(K)$ auf $R_{2,3}(K)$.

Theorem 8.24. *Es sei \mathcal{A}_{K^*} von der in (8.55) gegebenen Form. Dann ist $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}} \cup \mathcal{A}_{K^*}$ eine bestimmende Menge von $S_7^2(K^*)$.*

Beweis. Sei $s \in S_7^2(K^*)$. Ist s in der BB-Darstellung (2.5) gegeben, bezeichne $a_{i,j,k}^{[1,\mu]}$, $i + j + k = q$, die Bézier-Koeffizienten von $s|_{T^{[1,\mu]}}$, $\mu = 1, 2, 3$. Es gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}$. Dann ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_7(K^*)$ gilt. Wegen $\mathcal{B}_{K^*} \subset \mathcal{A}$ folgt direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in R_2(K^*)$. Ferner folgt wegen $\mathcal{A}_{y_1} \subset \mathcal{A}$ aus Lemma 8.15, dass $\lambda_P s = 0$, $P \in D_3(y_1)$, gilt. Aus der C^2 -Stetigkeitsbedingung an der Kante $e_{1,1}$ erhalten wir dann direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in C_{(1,1),5}^2(y_1)$. Nach Voraussetzung gilt $a_{2,3,2}^{[1,1]} = 0$, so dass aus der C^2 -Stetigkeitsbedingung auf $C_{(1,1),4}^2(y_1)$ $a_{2,3,3}^{[1,2]} = 0$ folgt. Wegen $a_{3,2,2}^{[1,3]} = 0$ folgt dann aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen an der Kante $e_{1,2}$ $a_{3,3,1}^{[1,3]} = a_{2,3,3}^{[1,3]} = 0$. Aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen an der Kante $e_{1,3}$ erhalten wir dann bereits $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_7(K^*)$. ■

Abbildung 8.7 zeigt eine Menge \mathcal{A}_{K^*} , die wie in (8.55) gegeben ist.

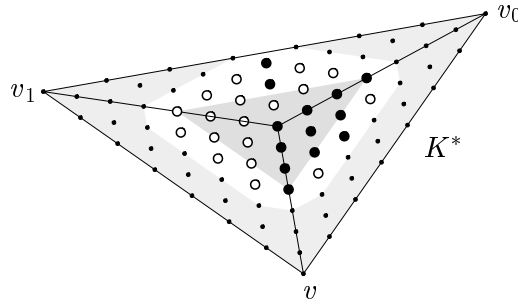


Abb. 8.7: Die Vereinigung der BB-Punkte • der Menge \mathcal{A}_{K^*} und der BB-Punkte • der Menge $R_{2,3}(K^*)$ bestimmen $S_7^2(K^*)$.

Kapitel 9

Minimal bestimmende Mengen von $S_q^2(\Delta)$ auf Zellen

Sei v ein beliebiger Eckpunkt von Δ und es bezeichne Δ_v die Standardzelle von v . Im Folgenden konstruieren wir für $q \geq 5$ allgemeine Klassen minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta_v)$. Wir unterscheiden dabei zwischen inneren Eckpunkten und Randpunkten von Δ . $n_v = \deg(v)$ bezeichne die Anzahl der von v ausgehenden Kanten. Aus Theorem 2.6 erhalten wir für die Dimension von $S_q^2(\Delta_v)$

$$\dim S_q^2(\Delta_v) = \begin{cases} n_v \frac{(q-1)(q-2)}{2} + 6 + \sigma_v, & v \in V_I, \\ (n_v - 2) \frac{(q-1)(q-2)}{2} + \frac{(q+1)(q+2)}{2}, & v \in V_B, \end{cases} \quad (9.1)$$

mit

$$\sigma_v = \sum_{j=1}^{q-2} (3 + j - j e_v)_+,$$

wobei e_v die Anzahl der von v ausgehenden Kanten mit verschiedener Steigung bezeichnet. Ist $v \in V_I$ und besitzt Δ_v mindestens vier aufeinander folgende innere Kanten, die paarweise nicht kollinear sind, so gilt $\sigma_v = 0$.

In Abschnitt 9.1 konstruieren wir für einen beliebigen inneren Eckpunkt v von Δ eine große Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta_v)$, indem wir analog zur Vorgehensweise in den Abschnitten 8.2 und 8.3 zur Charakterisierung minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta)$ auf Kegeln vorgehen. Wir wählen zunächst BB-Punkte aus $D_4(v)$ so, dass diese $S_q^2(\Delta_v)$ auf $D_4(v)$ bestimmen. Anschließend bestimmen wir $S_q^2(\Delta_v)$ auf den C^2 -Mengen entlang der inneren Kanten von Δ_v . Gilt für $v \in V_I$, dass $\sigma_v = 0$ ist, erhalten wir mit den Ergebnissen aus den Abschnitten 8.2 und 8.3 direkt eine weitere Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta_v)$. In Abschnitt 9.2 beschreiben wir eine allgemeine Klasse

minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta_v)$, $q \geq 5$, für einen beliebigen Randpunkt v von Δ .

9.1 Standardzellen innerer Eckpunkte

Gegeben sei die Standardzelle Δ_v eines beliebigen inneren Eckpunkts v einer Triangulierung Δ . Die Eckpunkte und Dreiecke von Δ_v seien wie in Abbildung 4.6 nummeriert. Ferner gelte $e_l = [v, v_l]$, $l = 1, \dots, n_v$. Wir beschreiben im Folgenden eine allgemeine Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta_v)$, $q \geq 5$. Jede Menge \mathcal{A} aus dieser Klasse besitzt die Eigenschaft, dass \mathcal{A} eingeschränkt auf $D_4(v)$ bereits eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta_v)$ auf $D_4(v)$ ist. Wir untersuchen dazu $S_q^2(\Delta_v)$ auf den Scheiben $D_p(v)$, $p = 2, 3, 4$. Ferner verwenden wir bei der Konstruktion minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta_v)$ die Beschreibung minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta_v)$ auf den Mengen $R_2(e_l)$ aus Abschnitt 8.1.2. Für den Fall, dass mindestens vier aufeinander folgende paarweise nicht kollineare Kanten ihren Ursprung in v haben, definieren wir eine weitere Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta_v)$. Dazu verwenden wir die Beschreibungen minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta_v)$ auf den BB-Punkten eines Kegels aus den Abschnitten 8.2 und 8.3.

Wir beginnen mit der Konstruktion minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta_v)$ auf $D_p(v)$, $2 \leq p \leq 4$. Mit Gleichung (9.1) gilt offensichtlich für die Dimension von $S_q^2(\Delta_v)$ auf $D_p(v)$, $p = 2, 3, 4$,

$$\dim S_q^2(\Delta_v)|_{D_p(v)} = n_v \frac{(p-1)(p-2)}{2} + 6 + \sigma_v \quad (9.2)$$

mit

$$\sigma_v = \sum_{j=1}^{p-2} (3 + j - j e_v)_+.$$

Sei zunächst $p = 2$. Ist v nicht singulär und e_l eine nicht degenerierte Kante, so bestimmt eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta_v)$ auf der C^2 -Menge $C_{l,2}^2(v)$ offensichtlich $S_q^2(\Delta_v)$ auf $D_2(v)$ in eindeutiger Weise. Gehen wir für degenerierte Kanten analog vor, ergibt sich eine erste Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta_v)$ auf $D_2(v)$. Wir erhalten weitere minimal bestimmende Mengen von $S_q^2(\Delta_v)$ auf $D_2(v)$, indem wir $S_q^2(\Delta_v)$ zunächst auf $D_1(v)$ eindeutig bestimmen und anschließend drei geeignete BB-Punkte aus $R_2(v)$ so wählen, dass die Vereinigung dieser Punkte $S_q^2(\Delta_v)$ auf $D_2(v)$ bestimmt.

Es sei $\mathcal{M}_2^2(v)$ eine Menge von Teilmengen von $D_2(v)$.

Definition von $\mathcal{M}_2^2(v)$:

Es gelte $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_2^2(v)$ genau dann, wenn \mathcal{A} einen der drei folgenden Fälle erfüllt.

Fall 1: \mathcal{A} enthält für ein $\tilde{l} \in \{0, \dots, n_v - 1\}$ die folgenden BB-Punkte:

(9.3) sechs BB-Punkte aus $C_{\tilde{l},2}^2(v)$, die den Voraussetzungen von Lemma 8.5 entsprechen, falls $e_{\tilde{l}}$ nicht degeneriert ist, oder

(9.4) drei BB-Punkte aus $C_{\tilde{l},2}^2(v)$, die nicht alle in $C_{\tilde{l},1}^1(v)$ liegen, zwei BB-Punkte aus $C_{\tilde{l},2}^2(v)$ und den BB-Punkt $P_{q-2,2,0}^{[\tilde{l}]}$, falls $e_{\tilde{l}}$ bzgl. v degeneriert ist, oder

(9.5) drei BB-Punkte aus $C_{\tilde{l},2}^2(v)$, die nicht alle in $C_{\tilde{l},2}^1(v)$ liegen, zwei BB-Punkte aus $C_{\tilde{l},1}^2(v)$ und den BB-Punkt $P_{q,0,0}^{[\tilde{l}]}$, falls $e_{\tilde{l}}$ bzgl. v_l degeneriert ist.

Fall 2: Für ein $\tilde{l} \in \{0, \dots, n_v - 1\}$ enthält \mathcal{A} die folgenden BB-Punkte:

(9.6) drei nicht kollineare BB-Punkte aus $D_1(v)$ und

(9.7) drei BB-Punkte aus $C_{\tilde{l},2}^2(v) \setminus D_1(v)$, die nicht alle in $C_{\tilde{l},2}^1(v)$ liegen, falls $e_{\tilde{l}}$ bzgl. v nicht degeneriert ist, oder je einen BB-Punkt aus $\{P_{q-2,0,2}^{[\tilde{l}]}, P_{q-2,2,0}^{[\tilde{l}+1]}\}$ und $\{P_{q-2,1,1}^{[\tilde{l}]}, P_{q-2,1,1}^{[\tilde{l}+1]}\}$ sowie den BB-Punkt $P_{q-2,2,0}^{[\tilde{l}]}$, falls $e_{\tilde{l}}$ bzgl. v degeneriert ist.

Fall 3: v ist nicht singulär und es seien $l_1, l_2, l_3 \in \{0, \dots, n_v - 1\}$ so gegeben, dass die Kanten e_{l_1} , e_{l_2} und e_{l_3} paarweise nicht kollinear sind. \mathcal{A} enthält die folgenden BB-Punkte:

(9.8) drei nicht kollineare BB-Punkte aus $D_1(v)$ sowie für $i = 1, 2, 3$ den BB-Punkt $P_{q-2,2,0}^{[l_i]}$.

Lemma 9.1. Sei $q \geq 2$ und sei $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_2^2(v)$. Dann ist \mathcal{A} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta_v)$ auf $D_2(v)$.

Beweis. Nach Konstruktion von \mathcal{A} gilt $|\mathcal{A}| = 6$. Mit (9.2) und Theorem 2.4 folgt dann für den Fall, dass \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta_v)$ auf $D_2(v)$ ist, dass \mathcal{A} minimal ist. Es bleibt zu zeigen, dass \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta_v)$ auf $D_2(v)$ ist. Sei $q \geq 2$ und es gelte $s \in S_q^2(\Delta_v)$. Ferner gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}$. Dann ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in D_2(v)$ gilt. Für $l = 1, \dots, n_v$ sei $s|_{T[l]}$ in der BB-Darstellung (2.5) gegeben.

Fall 1: Für ein $\tilde{l} \in \{0, \dots, n_v - 1\}$ besteht \mathcal{A} aus den BB-Punkten (9.3), (9.4) oder (9.5). Ist $e_{\tilde{l}}$ nicht degeneriert, folgt aus Lemma 8.5 direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in C_{\tilde{l},2}^2(v)$. Ist $e_{\tilde{l}}$ degeneriert, folgt aus Korollar 8.6 und der C^1 -Stetigkeitsbedingung auf $C_{\tilde{l},1}^1(v)$ und $C_{\tilde{l},2}^1(v)$, dass $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_q(T^{[\tilde{l}]} \cup T^{[\tilde{l}+1]}) \cap D_2(v)$, gilt. Nach sukzessiver Anwendung der C^1 - und C^2 -Stetigkeitsbedingungen auf die restlichen BB-Punkte in $D_2(v)$ folgt die Behauptung.

Fall 2: Für festes $\tilde{l} \in \{0, \dots, n_v - 1\}$ besteht \mathcal{A} aus den BB-Punkten (9.6) und (9.7). Nach Konstruktion von \mathcal{A} folgt direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in D_1(v)$. Ist $e_{\tilde{l}}$ bzgl. v nicht degeneriert, folgt

aus Lemma 8.5 $\lambda_P s = 0$, $P \in C_{\tilde{l},2}^2(v)$. Ist $e_{\tilde{l}}$ bzgl. v degeneriert, folgt aus Korollar 8.6 und der C^1 -Stetigkeitsbedingung auf $C_{\tilde{l},2}^1(v)$, dass $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_q(T^{[\tilde{l}]} \cup T^{[\tilde{l}+1]}) \cap D_2(v)$, gilt. Analog zum Beweis des Falls 1 folgt dann in beiden Fällen $\lambda_P s = 0$, $P \in D_2(v)$.

Fall 3: v ist nicht singulär und \mathcal{A} enthält für $l_1, l_2, l_3 \in \{0, \dots, n_v - 1\}$ die BB-Punkte (9.8). Nach Konstruktion von \mathcal{A} folgt direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in D_1(v)$. Mit den Beziehungen (2.7) zwischen den Bézier-Koeffizienten von s und den Richtungsableitungen ersten Grades von s an der Stelle v_l folgt somit

$$\frac{\partial^\rho s}{\partial^\rho \hat{e}_\nu}(v_l) = 0, \quad \rho = 0, 1, \quad \nu = 0, \dots, n + 1.$$

Da für $i = 1, 2, 3$ $a_{q-2,2,0}^{[l_i]} = 0$ gilt, erhalten wir mit (2.7)

$$\frac{\partial^2 s}{\partial^2 e_{l_i}}(v_l) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (9.9)$$

Nach Voraussetzung sind die Kanten $e_{l_1}, e_{l_2}, e_{l_3}$ paarweise nicht kollinear. Somit existieren $a_1, a_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass

$$\frac{\partial^2 s}{\partial^2 e_{l_3}}(v_l) = a_1^2 \frac{\partial^2 s}{\partial^2 e_{l_1}}(v_l) + 2a_1 a_2 \frac{\partial^2 s}{\partial e_{l_1} \partial e_{l_2}}(v_l) + a_2^2 \frac{\partial^2 s}{\partial^2 e_{l_2}}(v_l)$$

gilt. Wegen $a_1, a_2 \neq 0$ folgt dann mit (9.9)

$$\frac{\partial^2 s}{\partial e_{l_1} \partial e_{l_2}}(v_l) = 0.$$

Da $s \in S_q^2(\Delta_v)$ gilt, müssen somit alle Ableitungen zweiten Grades von s an der Stelle v_l identisch Null sein. Mit der Beziehung (2.8) zwischen den Bézier-Koeffizienten von s und den Richtungsableitungen von s folgt dann bereits $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in R_2(v)$. ■

Wir konstruieren nun eine Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta_v)$ auf $D_3(v)$, indem wir $S_q^2(\Delta_v)$ zunächst auf $D_2(v)$ bestimmen und anschließend weitere BB-Punkte aus $R_3(v)$ wählen. Wir wählen diese BB-Punkte in Abhängigkeit davon, ob Δ_v mindestens vier aufeinander folgende innere Kanten mit unterschiedlicher Steigung besitzt oder nicht. Es bezeichne e_v die Anzahl der Kanten von v mit paarweise verschiedener Steigung. Es sei die Menge $\mathcal{M}_3^2(v)$ als Menge von Teilmengen von $D_3(v)$ wie folgt definiert.

Definition von $\mathcal{M}_3^2(v)$:

Sei $\mathcal{A} \subset D_3(v)$. Dann gilt $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_3^2(v)$ genau dann, wenn \mathcal{A} wie folgt definiert ist.

Fall 1: v ist nicht singulär.

Gilt $e_v \geq 4$, nummerieren wir die inneren Kanten von Δ_v so, dass die Kanten $e_1, e_0, e_{n_v-1}, e_{n_v-2}$ paarweise nicht kollinear sind. Ferner sei $\tilde{l} \in \{1, \dots, n_v - 2\}$. Ist v nicht singulär und gilt $e_v < 4$, nummerieren wir die inneren Kanten von Δ_v so, dass die Kante e_0 bzgl. v nicht degeneriert ist, und es sei $\tilde{l} \in \{1, \dots, n_v - 1\}$. \mathcal{A} enthalte die folgenden BB-Punkte:

(9.10) die BB-Punkte einer Menge $\tilde{\mathcal{A}} \in \mathcal{M}_2^2(v)$,

(9.11) drei BB-Punkte aus $C_{\tilde{l},3}^2(v) \setminus D_2(v)$, die nicht alle in $C_{\tilde{l},3}^1(v)$ liegen, falls $e_{\tilde{l}}$ bzgl. v nicht degeneriert ist, und anderenfalls je einen BB-Punkt aus $\{P_{q-3,1,2}^{[\tilde{l}]}, P_{q-3,2,1}^{[\tilde{l}+1]}\}$ und $\{P_{q-3,2,1}^{[\tilde{l}]}, P_{q-3,1,2}^{[\tilde{l}+1]}\}$ sowie den BB-Punkt $P_{q-3,3,0}^{[\tilde{l}]}$,

(9.12) einen BB-Punkt aus $\{P_{q-3,3,0}^{[l]}, P_{q-3,2,1}^{[l]}, P_{q-3,1,2}^{[l]}\}$ für $1 \leq l < \tilde{l}$, falls e_l bzgl. v nicht degeneriert ist, und anderenfalls den BB-Punkt $P_{q-3,3,0}^{[l]}$,

(9.13) einen BB-Punkt aus $\{P_{q-3,3,0}^{[l]}, P_{q-3,1,2}^{[l+1]}, P_{q-3,2,1}^{[l+1]}\}$, falls e_l bzgl. v nicht degeneriert ist, und anderenfalls den BB-Punkt $P_{q-3,3,0}^{[l]}$ für $\tilde{l} < l \leq n_v - 2$, falls $e_v \geq 4$ gilt, und für $\tilde{l} < l \leq n_v - 1$, falls $e_v < 4$ gilt.

Fall 2: v ist singulär.

Dann enthalte \mathcal{A} die folgenden BB-Punkte:

(9.14) die BB-Punkte einer Menge $\tilde{\mathcal{A}} \in \mathcal{M}_2^2(v)$,

(9.15) je einen BB-Punkt aus $\{P_{q-3,2,1}^{[1]}, P_{q-3,1,2}^{[2]}, P_{q-3,2,1}^{[3]}, P_{q-3,1,2}^{[4]}\}$ und $\{P_{q-3,1,2}^{[1]}, P_{q-3,2,1}^{[2]}, P_{q-3,1,2}^{[3]}, P_{q-3,2,1}^{[4]}\}$ und

(9.16) die BB-Punkte $P_{q-3,3,0}^{[l]}$, $l = 1, 2, 3, 4$.

Lemma 9.2. *Sei $q \geq 3$ und sei $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_3^2(v)$. Dann ist \mathcal{A} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta_v)$ auf $D_3(v)$.*

Beweis. Nach Konstruktion von \mathcal{A} gilt $|\mathcal{A}| = 6 + n_v$, falls $e_v \geq 4$ ist. Ist $e_v < 4$, gilt $|\mathcal{A}| = 7 + n_v$. Ist \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta_v)$ auf $D_3(v)$, folgt somit aus (9.2) und Theorem 2.4, dass \mathcal{A} auch minimal ist. Es bleibt zu zeigen, dass \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta_v)$ auf $D_3(v)$ ist. Sei $q \geq 3$ und es gelte $s \in S_q^2(\Delta_v)$. Ferner gelte $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{A}$. Dann ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in D_3(v)$ gilt. Nach Konstruktion gilt $\mathcal{A} \cap D_2(v) \in \mathcal{M}_2^2(v)$. Aus Lemma 9.1 folgt somit $\lambda_P s = 0$, $P \in D_2(v)$. Es bleibt zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$, $P \in R_3(v)$, gilt.

Fall 1: v ist nicht singulär. \mathcal{A} besteht somit aus den BB-Punkten (9.10) bis (9.13). Aus Lemma 8.5 oder aus Korollar 8.6 sowie aus der C^1 -Stetigkeitsbedingung auf $C_{\tilde{l},2}^1(v)$ erhalten wir direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in \{P_{q-3,2,1}^{[\tilde{l}]}, P_{q-3,1,2}^{[\tilde{l}]}, P_{q-3,3,0}^{[\tilde{l}]}, P_{q-3,1,2}^{[\tilde{l}+1]}, P_{q-3,2,1}^{[\tilde{l}+1]}\}$. Gilt $e_v \geq 4$, folgt nach sukzessiver Anwendung der C^1 - und C^2 -Stetigkeitsbedingungen auf $R_3(v)$, dass $\lambda_P s = 0$, $P \in R_3(v) \setminus \mathcal{B}_q(T^{[n_v]})$, gilt. Da die Kanten $e_1, e_0, e_{n_v-1}, e_{n_v-2}$ paarweise nicht kollinear sind, folgt dann aus Korollar 8.1 bereits die Behauptung. Gilt $e_v < 4$, erhalten wir nach sukzessiver Anwendung der C^1 - und C^2 -Stetigkeitsbedingungen auf $R_3(v)$, dass

$\lambda_P s = 0$, $P \in R_3(v) \setminus \{P_{q-3,3,0}^{[n_v]}\}$, gilt. Da e_0 bzgl. v nicht degeneriert ist, folgt aus der C^1 -Stetigkeitsbedingung auf $C_{0,3}^1(v)$ die Behauptung.

Fall 2: v ist singulär und \mathcal{A} besteht aus den BB-Punkten (9.14) bis (9.16). Da \mathcal{A} die BB-Punkte (9.15) enthält, folgt aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen auf $C_{l,3}^2(v)$ sowie aus den C^1 -Stetigkeitsbedingungen auf $C_{l,3}^1(v)$ direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in R_3(v) \setminus \{P_{q-3,3,0}^{[l]} : l = 1, 2, 3, 4\}$. Da \mathcal{A} ferner die BB-Punkte (9.16) enthält, folgt bereits die Behauptung. ■

Wir wenden uns nun den minimal bestimmenden Mengen von $S_q^2(\Delta_v)$ auf einer Teilmenge von $D_4(v)$ zu. Es sei

$$D_4^*(v) = \{P : P \in C_{l,p}^2(v), p = 2, 3, 4, l = 1, \dots, n_v\}. \quad (9.17)$$

Wir konstruieren im Folgenden eine Klasse bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta_v)$ auf $D_4^*(v)$. Dazu wählen wir zunächst eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta_v)$ auf $D_3(v) \cap D_4^*(v)$. Anschließend bestimmen wir $S_q^2(\Delta_v)$ auf den restlichen BB-Punkten in $R_4(v)$. Die Menge $\mathcal{M}_4^2(v)$ von Teilmengen von $D_4^*(v)$ wählen wir demnach wie folgt.

Definition von $\mathcal{M}_4^2(v)$:

Es gilt $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_4^2(v)$ genau dann, wenn \mathcal{A} einen der folgenden beiden Fälle erfüllt.

Fall 1: v ist nicht singulär.

Wir nummerieren die inneren Kanten von Δ_v so, dass die Kante e_0 bzgl. v nicht degeneriert ist. \mathcal{A} enthalte für festes $\tilde{l} \in \{1, \dots, n_v - 1\}$ die folgenden BB-Punkte:

(9.18) die BB-Punkte einer Menge $\tilde{\mathcal{A}} \setminus \{P_{q-3,3,0}^{[l]} : e_l \text{ ist bzgl. } v \text{ degeneriert}, 1 \leq l \leq n_v\}$ mit $\tilde{\mathcal{A}} \in \mathcal{M}_2^3(v)$,

(9.19) drei BB-Punkte aus $C_{l,4}^2(v) \setminus D_4(v)$, die nicht alle in $C_{l,4}^1(v)$ liegen, falls $e_{\tilde{l}}$ bzgl. v nicht degeneriert ist, und anderenfalls einen BB-Punkt aus $\{P_{q-4,2,2}^{[\tilde{l}]}, P_{q-4,2,2}^{[\tilde{l}+1]}\}$,

(9.20) zwei BB-Punkte aus $\{P_{q-4,2,2}^{[l]}, P_{q-4,3,1}^{[l]}, P_{q-4,4,0}^{[l]}, P_{q-4,1,3}^{[l+1]}\}$ für $1 \leq l < \tilde{l}$, falls e_l bzgl. v nicht degeneriert ist,

(9.21) zwei BB-Punkte aus $\{P_{q-4,3,1}^{[l]}, P_{q-4,4,0}^{[l]}, P_{q-4,1,3}^{[l+1]}, P_{q-4,2,2}^{[l+1]}\}$ für $\tilde{l} < l \leq n_v - 1$, falls e_l bzgl. v nicht degeneriert ist, und

(9.22) einen BB-Punkt aus $\{P_{q-4,4,0}^{[n_v]}, P_{q-4,3,1}^{[n_v]}, P_{q-4,1,3}^{[1]}\}$.

Fall 2: v ist singulär.

\mathcal{A} enthalte einen BB-Punkt aus $\{P_{q-4,2,2}^{[l]} : l = 1, \dots, 4\}$ und die Menge $\tilde{\mathcal{A}} \setminus \{P_{q-3,3,0}^{[l]} : l = 1, \dots, 4\}$ mit $\tilde{\mathcal{A}} \in \mathcal{M}_2^3(v)$.

Lemma 9.3. *Sei $q \geq 4$ und sei $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_4^2(v)$. Dann ist \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta_v)$ auf $D_4^*(v)$.*

Beweis. Sei $q \geq 4$ und es gelte $s \in S_q^2(\Delta_v)$. Ferner gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}$. Dann ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in D_4^*(v)$ gilt.

Fall 1: v ist nicht singulär und \mathcal{A} besteht aus den BB-Punkten (9.18) bis (9.22). Aus Lemma 9.2 erhalten wir direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in D_3(v) \cap D_4^*(v)$. Aus der C^2 -Stetigkeitsbedingung auf $C_{l,4}^2(v)$ folgt dann $\lambda_P s = 0$, $P \in C_{l,4}^2(v)$. Nach sukzessiver Anwendung von Lemma 8.5 und von Korollar 8.6 folgt ferner $\lambda_P s = 0$, $P \in D_4^*(v) \setminus \{P_{q-4,4,0}^{[1]}, P_{q-4,3,1}^{[1]}, P_{q-4,1,3}^{[n_v]}\}$, so dass aus der C^1 -Stetigkeitsbedingung auf $C_{0,4}^1(v)$ die Behauptung folgt.

Fall 2: v ist singulär. Nach Konstruktion von \mathcal{A} folgt aus Lemma 9.2 $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in D_4^*(v) \setminus \{P_{q-4,2,2}^{[l]} : l = 1, 2, 3, 4\}$. Da \mathcal{A} einen BB-Punkt aus $\{P_{q-4,2,2}^{[l]} : l = 1, 2, 3, 4\}$ enthält, folgt dann aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen auf $C_{l,4}^2(v)$, $l = 1, 2, 3, 4$, bereits die Behauptung. ■

Mit Hilfe von Lemma 9.3 sind wir nun in der Lage, für einen beliebigen inneren Eckpunkt v von Δ eine allgemeine Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta_v)$, $q \geq 5$, zu konstruieren. Es seien die Mengen $\mathcal{M}_{5,q}^2(e_l)$ und $\tilde{\mathcal{M}}_{5,q}^2(e_l)$ wie in Abschnitt 8.1.2 definiert.

Konstruktion minimal bestimmender Mengen:

Die Mengen $\mathcal{A}_l \subset \mathcal{B}_q(\Delta_v)$, $l = 0, \dots, n_v$, seien wie folgt gewählt:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &\in \mathcal{M}_4^2(v), \\ \mathcal{A}_l &\in \begin{cases} \mathcal{M}_{5,q}^2(e_l), & \text{falls } e_l \text{ bzgl. } v \text{ degeneriert ist,} \\ \tilde{\mathcal{M}}_{5,q}^2(e_l), & \text{sonst,} \end{cases} \quad l = 1, \dots, n_v. \end{aligned}$$

Dann definieren wir

$$\mathcal{A} := \cup_{l=0}^{n_v} \mathcal{A}_l \cup \{P_{i,j,k}^{[l]} : i, j, k \geq 3, l = 1, \dots, n_v\}. \quad (9.23)$$

Theorem 9.4. *Sei $q \geq 5$ und sei \mathcal{A} von der in (9.23) gegebenen Form. Dann ist \mathcal{A} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta_v)$.*

Beweis. Sei $q \geq 5$ und es gelte $s \in S_q^2(\Delta_v)$. Wir zeigen zunächst, dass \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta_v)$ ist. Es gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}$. Dann ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_q(\Delta_v)$ gilt. Offensichtlich gilt

$$\mathcal{B}_q(\Delta_v) = D_4^*(v) \cup (\cup_{l=0}^{n_v-1} R_2(e_l)) \cup \{P_{i,j,k}^{[l]} : i, j, k \geq 3, l = 1, \dots, n_v\}, \quad (9.24)$$

wobei $D_4^*(v)$ wie in (9.17) und $R_2(e_l)$ für $l = 0, \dots, n_v - 1$ wie in (8.15) gegeben sind. Wegen $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ folgt aus Lemma 9.3 direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in D_4^*(v)$. Somit gilt insbesondere für alle

Kanten e_l , die bzgl. v nicht degeneriert sind, $\lambda_P s = 0$, $P \in C_{l,4}^1(v)$. Aus Korollar 8.13 folgt dann wegen $\mathcal{A}_l \subset \mathcal{A}$, dass $\lambda_P s = 0$, $P \in R_2(e_l)$, gilt. Ist für $l \in \{1, \dots, n_v\}$ die Kante e_l bzgl. v degeneriert, folgt wegen $\mathcal{A}_l \subset \mathcal{A}$ aus Lemma 8.12 direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in R_2(e_l)$. Da \mathcal{A} die Menge $\{P_{i,j,k}^{[l]}, i, j, k \geq 3, l = 1, \dots, n_v\}$ enthält, folgt mit (9.24) $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_q(\Delta_v)$.

Es bleibt zu zeigen, dass \mathcal{A} minimal ist. Nach Konstruktion und mit (9.1) gilt

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| &= 3n_v + 6 + \sigma_v + 3(q-4)n_v + n_v \frac{(q-4)(q-5)}{2} \\ &= n_v \frac{(q-1)(q-2)}{2} + 6 + \sigma_v = \dim S_q^2(\Delta_v). \end{aligned}$$

Aus Theorem 2.4 folgt dann die Behauptung. ■

Wir betrachten nun die Zelle eines inneren Eckpunkts v , von dem mindestens vier aufeinander folgende Kanten ausgehen, die paarweise nicht kollinear sind. In diesem Fall besitzt der Kegel, der entsteht, wenn wir eine solche Zelle entlang einer geeigneten inneren Kante e_{l^*} „aufschneiden“, ebenfalls vier aufeinander folgende innere Kanten mit paarweise verschiedener Steigung. Wir bestimmen demnach $S_q^2(\Delta_v)$ zunächst auf $D_2(v)$, dann auf den C^2 -Mengen entlang der Kante e_{l^*} und schließlich auf dem Kegel $K = \Delta_v \setminus e_{l^*}$. Sei also Δ_v die Standardzelle von v , so dass mindestens vier aufeinander folgende innere Kanten von Δ_v eine unterschiedliche Steigung haben. Wir nummerieren die Kanten von Δ_v so, dass für mindestens ein $l \in \{1, \dots, n_v - 2\}$ die Kanten $e_{l-1}, e_l, e_{l+1}, e_{l+2}$ paarweise nicht kollinear sind. Ferner sei der Kegel K definiert durch $K := \Delta_v \setminus \{e_0\}$. Die Mengen $\mathcal{M}_{3,q}(e_0)$ und $\tilde{\mathcal{M}}_{3,q}(e_0)$ seien analog zu den Mengen $\mathcal{M}_{5,q}(e_0)$ bzw. $\tilde{\mathcal{M}}_{5,q}(e_0)$ aus Abschnitt 8.1.2 definiert.

Konstruktion minimal bestimmender Mengen:

Es gelte $\mathcal{A}_v \in \mathcal{M}_2^2(v)$. Die Menge $\mathcal{A}_0 \subset \{P : P \in C_{0,p}^2(v), p = 3, \dots, q\}$ sei wie folgt definiert. Ist e_0 nicht degeneriert, gelte $\mathcal{A}_0 \in \tilde{\mathcal{M}}_{3,q}^2(e_0)$. Ist e_0 bzgl. v_0 degeneriert, gelte $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{M}_{3,q}^2(e_0)$. Ist e_0 bzgl. v degeneriert, sei $\tilde{\mathcal{A}}_0 \in \mathcal{M}_{5,q}^2(e_0)$ und es gelte $\tilde{\mathcal{A}}_0 \subset \mathcal{A}_0$. \mathcal{A}_0 enthalte in diesem Fall ferner je einen BB-Punkt aus $\{P_{q-3,2,1}^{[n_v]}, P_{q-3,1,2}^{[1]}\}$, $\{P_{q-3,1,2}^{[n_v]}, P_{q-3,2,1}^{[1]}\}$ und $\{P_{q-4,2,2}^{[n_v]}, P_{q-4,2,2}^{[1]}\}$. Die Menge \mathcal{A}_K sei für den Kegel K wie in (8.33) gegeben, falls $q \leq 6$ gilt, und wie in (8.53), falls $q \geq 7$ gilt. Dann definieren wir

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_v \cup \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_K. \quad (9.25)$$

Theorem 9.5. *Es sei v ein innerer Eckpunkt von Δ , so dass mindestens vier aufeinander folgende innere Kanten von Δ_v paarweise nicht kollinear sind. Sei $q \geq 5$ und sei \mathcal{A} von der in (9.25) gegebenen Form. Dann ist \mathcal{A} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta_v)$.*

Beweis. Sei $q \geq 5$ und es gelte $s \in S_q^2(\Delta_v)$. Wir zeigen zunächst, dass \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta_v)$ ist. Es gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}$. Dann ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für

alle $P \in \mathcal{B}_q(\Delta_v)$ gilt. Offensichtlich gilt

$$\mathcal{B}_q(\Delta_v) = D_2(v) \cup \{P : P \in C_{0,p}^2(v), p = 3, \dots, q\} \cup \mathcal{B}_q(K). \quad (9.26)$$

Wegen $\mathcal{A}_v \subset \mathcal{A}$ folgt direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in D_2(v)$. Ist e_0 nicht degeneriert, gilt somit insbesondere $\lambda_P s = 0$, $P \in C_{0,2}^1(v)$. Nach Konstruktion von $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ folgt dann aus Korollar 8.13 $\lambda_P s = 0$, $P \in \cup_{p=3}^q C_{0,p}^2(v)$. Ist e_0 bzgl. v degeneriert, folgt aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen auf $C_{0,3}^2(v)$ und $C_{0,4}^2(v)$ sowie aus Lemma 8.12 ebenfalls $\lambda_P s = 0$, $P \in \cup_{p=3}^q C_{0,p}^2(v)$. Da $\mathcal{A}_K \subset \mathcal{A}$ gilt, folgt für $q = 5, 6$ aus Theorem 8.19 bzw. für $q \geq 7$ aus Theorem 8.22, dass \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta_v)$ ist.

Somit bleibt zu zeigen, dass \mathcal{A} minimal ist. Nach Konstruktion und mit (9.1) gilt

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| &= 6 + 3(q-2) + (n_v + 1) \frac{(q-1)(q-2)}{2} - \frac{(q+1)(q+2)}{2} + 6 \\ &= n_v \frac{(q-1)(q-2)}{2} + 6 = \dim S_q^2(\Delta_v). \end{aligned}$$

Aus Theorem 2.4 folgt somit die Behauptung. ■

9.2 Standardzelle von Randpunkten

Im Folgenden sei v ein beliebiger Randpunkt der Triangulierung Δ . In diesem Abschnitt zeigen wir, dass wir analog zur Konstruktion minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta)$ auf einem Kegel K in den Abschnitten 8.2 und 8.3 unmittelbar eine große Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta_v)$ erhalten. Wir konstruieren zunächst minimal bestimmende Mengen von $S_q^2(\Delta_v)$ auf den Scheiben $D_p(v)$, $p = 2, 3, 4$.

Sei $n_v = \deg(v)$. Wir nummerieren die Eckpunkte von Δ_v gegen den Uhrzeigersinn mit v_0, \dots, v_{n_v-1} . Für $l = 0, \dots, n_v - 1$ sei $e_l := [v, v_l]$ und für $l = 1, \dots, n_v - 1$ sei $T^{[l]} := \Delta(v, v_{l-1}, v_l)$. Analog zur Definition der Menge $\mathcal{M}_2^2(v)$ für innere Eckpunkte definieren wir nun die Menge $\mathcal{M}_2^2(v)$ für Randpunkte als Menge von Teilmengen von $D_2(v)$.

Definition von $\mathcal{M}_2^2(v)$:

Es gilt $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_2^2(v)$ genau dann, wenn \mathcal{A} einen der folgenden drei Fälle erfüllt.

Fall 1: Für ein $\tilde{l} \in \{1, \dots, n_v - 1\}$ enthält \mathcal{A} die BB-Punkte (9.3).

Fall 2: Für ein $\tilde{l} \in \{1, \dots, n_v - 1\}$ enthält \mathcal{A} die BB-Punkte (9.6) und (9.7).

Fall 3: Die Kanten e_{l_1} , e_{l_2} und e_{l_3} seien paarweise nicht kollinear, $l_1, l_2, l_3 \in \{0, \dots, n_v\}$.

Dann enthält \mathcal{A} für l_1, l_2, l_3 die BB-Punkte (9.8).

Korollar 9.6. *Sei $q \geq 2$ und sei $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_2^2(v)$. Dann ist \mathcal{A} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta_v)$ auf $D_2(v)$.*

Beweis. Die Behauptung folgt analog zum Beweis von Lemma 9.1. ■

Wir betrachten nun die Menge

$$D_3^*(v) := D_3(v) \setminus \{P_{q-3,3,0}^{[l]} : e_l \text{ ist bzgl. } v \text{ degeneriert, } l = 1, \dots, n_v - 2\}.$$

Es sei $\mathcal{M}_3^2(v)$ die Menge von Teilmengen von $D_3^*(v)$, die wie folgt definiert sind.

Definition von $\mathcal{M}_3^2(v)$:

Es gilt $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_3^2(v)$ genau dann, wenn für ein $\tilde{l} \in \{1, \dots, n_v - 1\}$ \mathcal{A} die folgenden BB-Punkten enthält:

- die BB-Punkte einer Menge $\tilde{\mathcal{A}} \in \mathcal{M}_2^2(v)$,
- drei BB-Punkte aus $C_{\tilde{l},3}^2(v) \setminus D_2(v)$, die nicht alle in $C_{\tilde{l},3}^1(v)$ liegen, falls $e_{\tilde{l}}$ bzgl. v nicht degeneriert ist, und anderenfalls je einen BB-Punkt aus $\{P_{q-3,1,2}^{[\tilde{l}]}, P_{q-3,2,1}^{[\tilde{l}+1]}\}$ und $\{P_{q-3,2,1}^{[\tilde{l}]}, P_{q-3,1,2}^{[\tilde{l}+1]}\}$,
- einen BB-Punkt aus $\{P_{q-3,3,0}^{[l]}, P_{q-3,2,1}^{[l]}, P_{q-3,1,2}^{[l]}\}$ für $1 \leq l < \tilde{l}$, falls e_l bzgl. v nicht degeneriert ist,
- einen BB-Punkt aus $\{P_{q-3,3,0}^{[l]}, P_{q-3,1,2}^{[l+1]}, P_{q-3,2,1}^{[l+1]}\}$ für $\tilde{l} < l \leq n_v - 2$, falls e_l bzgl. v nicht degeneriert ist,
- die BB-Punkte $P_{q-3,0,3}^{[1]}$ und $P_{q-3,3,0}^{[n_v-1]}$.

Lemma 9.7. *Sei $q \geq 3$ und sei $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_3^2(v)$. Dann ist \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta_v)$ auf $D_3^*(v)$.*

Beweis. Sei $q \geq 3$ und es gelte $s \in S_q^2(\Delta_v)$. Ferner gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}$. Dann ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in D_3^*(v)$ gilt. Nach Konstruktion von \mathcal{A} folgt direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in D_2(v)$. Aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen an der Kante $e_{\tilde{l}}$ folgt dann ferner $\lambda_P s = 0$, $P \in C_{\tilde{l},3}^2(v)$, falls $e_{\tilde{l}}$ bzgl. v nicht degeneriert ist, und anderenfalls $\lambda_P s = 0$, $P \in C_{\tilde{l},3}^2(v) \cup C_{\tilde{l},3}^1(v)$. Nach sukzessiver Anwendung der C^2 -Stetigkeitsbedingungen auf die restlichen BB-Punkte in $R_3(v) \cap D_3^*(v)$ folgt dann bereits die Behauptung. ■

Bemerkung 9.8. *Es sei $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_3^2(v)$. Dann folgt mit Lemma 9.7, dass die Vereinigung*

$$\mathcal{A}_0 := \mathcal{A} \cup \{P_{q-3,3,0}^{[l]} : e_l \text{ ist bzgl. } v \text{ degeneriert, } l = 1, \dots, n_v - 2\}$$

eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta_v)$ auf $D_3(v)$ ist, denn nach Konstruktion gilt $|\mathcal{A}_0| = n_v + 8 = \dim S_q^2(\Delta_v)|_{D_3(v)}$.

Wir betrachten nun $S_q^2(\Delta_v)$ auf der Menge

$$D_4^*(v) := D_4(v) \setminus \{P_{q-3,3,0}^{[l]}, P_{q-4,4,0}^{[l]}, P_{q-4,3,1}^{[l]}, P_{q-4,1,3}^{[l+1]} : e_l \text{ ist bzgl. } v \text{ deg.}, l = 1, \dots, n_v - 2\}.$$

Wir definieren $\mathcal{M}_4^2(v)$ als die Menge der folgenden Teilmengen von $D_4^*(v)$.

Definition von $\mathcal{M}_4^2(v)$:

Es gelte $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_4^2(v)$ genau dann, wenn $\mathcal{A} \subset D_4^*(v)$ für ein $\tilde{l} \in \{1, \dots, n_v - 2\}$ die folgenden BB-Punkte enthält:

- die BB-Punkte einer Menge $\tilde{\mathcal{A}} \in \mathcal{M}_3^2(v)$,
- drei BB-Punkte aus $C_{\tilde{l},4}^2(v)$, die nicht alle in $C_{\tilde{l},4}^1(v)$ liegen, falls $e_{\tilde{l}}$ bzgl. v nicht degeneriert ist, und anderenfalls einen BB-Punkt aus $\{P_{q-4,2,2}^{[\tilde{l}]}, P_{q-4,2,2}^{[\tilde{l}+1]}\}$,
- zwei BB-Punkte aus $\{P_{q-4,3,1}^{[l]}, P_{q-4,4,0}^{[l]}, P_{q-4,1,3}^{[l+1]}, P_{q-4,2,2}^{[l+1]}\}$ für $1 \leq l < \tilde{l}$, falls e_l bzgl. v nicht degeneriert ist,
- zwei BB-Punkten aus $\{P_{q-4,2,2}^{[l]}, P_{q-4,3,1}^{[l]}, P_{q-4,4,0}^{[l]}, P_{q-4,1,3}^{[l+1]}\}$ für $\tilde{l} < l \leq \lambda$, falls e_l bzgl. v nicht degeneriert ist, und
- die BB-Punkte $P_{q-3,0,3}^{[1]}, P_{q-4,0,4}^{[1]}, P_{q-4,1,3}^{[1]}$ und $P_{q-3,3,0}^{[n_v-1]}, P_{q-4,4,0}^{[n_v-1]}, P_{q-4,3,1}^{[n_v-1]}$.

Lemma 9.9. *Sei $q \geq 4$ und sei $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_4^2(v)$. Dann ist \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta_v)$ auf $D_4^*(v)$.*

Beweis. Sei $q \geq 4$ und es gelte $s \in S_q^2(\Delta_v)$. Ferner gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}$. Dann ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in D_4^*(v)$ gilt. Nach Konstruktion von \mathcal{A} folgt direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in D_3^*(v)$. Aus der C^2 -Stetigkeitsbedingung an der Kante $e_{\tilde{l}}$ folgt dann $\lambda_P s = 0$, $P \in C_{\tilde{l},4}^2(v)$. Nach sukzessiver Anwendung der C^2 -Stetigkeitsbedingungen auf die restlichen BB-Punkte in $R_4(v) \cap D_4^*(v)$ folgt dann die Behauptung. ■

Wir konstruieren nun eine allgemeine Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta_v)$, $q \geq 5$.

Konstruktion minimal bestimmender Mengen:

Es sei $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{M}_4^2(v)$. Für $l = 1, \dots, n_v - 2$ sei $\mathcal{A}_l \in \tilde{\mathcal{M}}_{5,q}^2(e_l)$, falls e_l bzgl. v nicht degeneriert ist, bzw. es sei $\mathcal{A}_l \in \mathcal{M}_{5,q}^2(e_l)$, falls e_l bzgl. v degeneriert ist. Ferner sei

$$\mathcal{M} := \{P_{i,j,k}^{[1]}, P_{i,k,j}^{[n_v-1]} : i \geq 5, j \leq 2, i+j+k = q\} \cup \{P_{i,j,k}^{[l]} : i, j, k \geq 3, l = 1, \dots, n_v - 1\}.$$

Dann definieren wir

$$\mathcal{A} := \bigcup_{l=0}^{n_v-2} \mathcal{A}_l \cup \mathcal{M}. \quad (9.27)$$

Theorem 9.10. *Sei $q \geq 5$ und sei \mathcal{A} von der in (9.27) gegebenen Form. Dann ist \mathcal{A} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta_v)$.*

Beweis. Sei $q \geq 5$ und es gelte $s \in S_q^2(\Delta_v)$. Wir zeigen zunächst, dass \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta_v)$ ist. Es gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}$. Dann ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \Delta_v$ gilt. Offensichtlich gilt

$$\mathcal{B}_q(\Delta_v) = D_4^*(v) \cup (\cup_{l=1}^{n_v-2} R_2(e_l)) \cup \mathcal{M}. \quad (9.28)$$

Nach Konstruktion von \mathcal{A} folgt aus Lemma 9.9 direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in D_4^*(v) \cup \mathcal{M}$. Insbesondere gilt dann für eine Kante e_l , $l \in \{1, \dots, n_v - 2\}$, die bzgl. v nicht degeneriert sind, $\lambda_P s = 0$, $P \in C_{l,4}^1(v)$. Wegen $\mathcal{A}_l \subset \mathcal{A}$ folgt dann aus Korollar 8.13 bereits $\lambda_P s = 0$, $P \in R_2(e_l)$. Ist e_l bzgl. v degeneriert, erhalten wir aus Lemma 8.13 direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in R_2(e_l)$, $l \in \{1, \dots, n_v - 2\}$. Wegen (9.28) folgt dann bereits, dass \mathcal{A} $S_q^2(\Delta_v)$ bestimmt.

Es bleibt zu zeigen, dass \mathcal{A} minimal ist. Nach Konstruktion von \mathcal{A} gilt mit (9.1)

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| &= 3n_v + 3 + (n_v - 1) \frac{(q-4)(q-5)}{2} + 6(q-3) + 3(n_v - 2)(q-4) \\ &= (n_v - 2) \frac{(q-1)(q-2)}{2} + \frac{(q+1)(q+2)}{2} = \dim S_q^2(\Delta_v). \end{aligned}$$

Aus Theorem 2.4 folgt dann die Behauptung. ■

Kapitel 10

Der Splineraum $S_q^2(\Delta)$, $q = 5, 6$

In diesem Kapitel betrachten wir den Splineraum $S_q^2(\Delta)$, $q = 5, 6$. Nürnberger & Zeilfelder [49] beschrieben für eine Klasse von Triangulierungen, die induktiv erzeugt werden und keine Semisingularitäten enthalten, eine spezielle minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta)$. Ferner entwickelten sie für diese Klasse von Triangulierungen ein Hermite- und Lagrange-Interpolationsschema für $S_q^2(\Delta)$. Wir betrachten im Folgenden Triangulierungen, die wir durch schrittweises Hinzufügen beliebiger Kegel und Zellen zu einem gegebenen Startdreieck erhalten. Wir durchlaufen eine solche Triangulierung Δ nach Algorithmus 2 aus Abschnitt 3.1, wobei wir gegebenenfalls den aktuellen Kegel modifizieren. Basierend auf den Resultaten aus Kapitel 8 und Kapitel 9 konstruieren wir in Abschnitt 10.1 eine allgemeine Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta)$. Unter Verwendung der Relationen zwischen den Bézier-Koeffizienten und den partiellen Ableitungen eines Splines können wir somit in Abschnitt 10.2 direkt eine große Klasse von Hermite-Interpolationsbedingungen für $S_q^2(\Delta)$, $q = 5, 6$, angeben. Ferner konstruieren wir in Abschnitt 10.3 allgemeine Lagrange-Interpolationsmengen für $S_5^2(\Delta)$, indem wir wie auch schon bei der Konstruktion von Lagrange-Interpolationsmengen für $S_q^1(\Delta)$, $q \geq 5$, in Kapitel 7 die Methode der Reduktion des Polynomgrads verwenden.

Sei nun Δ eine beliebige Triangulierung, die mittels Algorithmus 2 so durchlaufen werden kann, dass zu keinem Zeitpunkt ein Fill angehängt wird. Fassen wir die Zelle eines Flappunkts $v \in V_I$ als Vereinigung des Dreiecks, das mit der bereits durchlaufenen Teiltriangulierung eine gemeinsame Kante hat, und dem Kegel bestehend aus den restlichen Dreiecken der Zellen auf, modifizieren wir Δ wie folgt. Besitzt dieser Kegel einen Flappunkt oder der Kegel eines Randpunkts, der zur bereits durchlaufenen Teiltriangulierung hinzugefügt wird, nicht vier aufeinander folgende Kanten, die paarweise nicht kollinear sind, unterteilen wir wie in Abschnitt 8.2 beschrieben ein oder zwei Dreiecke des Kegels durch einen Clough-Tochter-Split. Wir erreichen somit, dass alle Kegel mindestens vier auf-

einander folgende Kanten besitzen, die vom Scheitelpunkt ausgehen und eine paarweise verschiedene Steigung besitzen. Wir bezeichnen die so modifizierte Triangulierung von Δ mit Δ^* .

Mittels Algorithmus 2 erhalten wir eine Indizierung der relevanten Eckpunkte v_1, \dots, v_n von Δ . Nach Konstruktion sind die Teiltriangulierungen Δ_ν , $\nu = 0, \dots, n$, induktiv wie folgt definiert.

$$\begin{aligned}\Delta_0 &:= T^{[0]}, \\ \Delta_\nu &:= \Delta_{\nu-1} \cup K_\nu, \quad \nu = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Dabei bezeichne K_ν für den Fall, dass v_ν ein Randpunkt von $\Delta_{\nu-1}$ ist, den Kegel von v_ν bzgl. $\Delta_{\nu-1}$. Ist v_ν kein Randpunkt von $\Delta_{\nu-1}$, aber ein innerer Eckpunkt von Δ , gelte $K_\nu = \Delta_{v_\nu}$. Ist schließlich v_ν weder ein Randpunkt von $\Delta_{\nu-1}$ noch ein innerer Eckpunkt von Δ , gelte $K_\nu = \Delta(v_\nu, w, w')$, wobei w und w' benachbarte Randpunkte von $\Delta_{\nu-1}$ sind und ferner $\Delta(v_\nu, w, w') \in \Delta_{v_\nu}$ gilt. Für $\nu = 0, \dots, n$ bezeichne $V_I^{(\nu)}$ die Menge der inneren Eckpunkte, $V_B^{(\nu)}$ die Menge der Randpunkte, $E_I^{(\nu)}$ die Menge der inneren Kanten und $E_B^{(\nu)}$ die Menge der Randkanten von Δ_ν .

Wir betrachten die Zelle Δ_{v_ν} eines Eckpunkts v_ν . Es gelte $n_\nu = \deg(v_\nu)$. Wir nummerieren die Randpunkte der Zelle Δ_{v_ν} gegen den Uhrzeigersinn mit $v_{\nu,0}, \dots, v_{\nu,n_\nu-1}$. Die Kanten von Δ_{v_ν} seien mit $e_{\nu,l} = [v_\nu, v_{\nu,l}]$ und $\tilde{e}_{\nu,l} = [v_{\nu,l-1}, v_{\nu,l}]$ bezeichnet, $l = 1, \dots, n_\nu$. Ferner sei $T^{[\nu,l]} = \Delta(v_\nu, v_{\nu,l-1}, v_{\nu,l})$, $l = 1, \dots, n_\nu$. Die Indizes l sind hierbei sowie im Folgenden stets als l modulo n_ν zu verstehen.

Ist v_ν ein Randpunkt von $\Delta_{\nu-1}$, dann gelte

$$K_\nu = \{T^{[\nu,l]} : l = 1, \dots, \lambda_\nu\}.$$

Ist v_ν ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, dann gelte

$$K_\nu = \begin{cases} \{T^{[\nu,l]} : l = 1, \dots, n_\nu\}, & v_\nu \in V_I, \\ \Delta(v_\nu, v_{\nu,0}, v_{\nu,1}), & v_\nu \in V_B, \end{cases} \quad \text{und} \quad [v_{\nu,0}, v_{\nu,1}] \in E_B^{(\nu-1)}.$$

Es sei Δ^* die modifizierte Triangulierung von Δ . Wir durchlaufen Δ^* in der gleichen Reihenfolge wie die Basis-Triangulierung Δ . Wurden Dreiecke von K_ν in der Triangulierung Δ^* unterteilt, dann bezeichnen wir den modifizierten Kegel bzw. die modifizierte Zelle mit K_ν^* . Ferner sei $\mathcal{N}^* \subset \{1, \dots, n\}$ die Indexmenge aller K_ν , die in Δ^* modifiziert wurden. Dann definieren wir

$$\begin{aligned}\Delta_0^* &:= \Delta_0, \\ \Delta_\nu^* &:= \begin{cases} \Delta_{\nu-1}^* \cup K_\nu^*, & \text{falls } \nu \in \mathcal{N}^* \text{ gilt,} \\ \Delta_{\nu-1}^* \cup K_\nu, & \text{falls } \nu \notin \mathcal{N}^* \text{ gilt,} \end{cases} \quad \nu = 1, \dots, n.\end{aligned} \tag{10.1}$$

Für $\nu = 0, \dots, n$ bezeichne $V_I^{*(\nu)}$ die Menge der inneren Eckpunkte, $V_B^{*(\nu)}$ die Menge der Randpunkte und $E_I^{*(\nu)}$ die Menge der inneren Kanten von Δ_ν^* .

10.1 Minimal bestimmende Mengen

Gegeben sei eine Triangulierung Δ die mittels Algorithmus 2 ohne Auftreten von Fills durchlaufen werden kann. Ferner sei $\Delta^* = \Delta_n^*$ die modifizierte Triangulierung von Δ , die wie in (10.1) definiert ist. Im Folgenden konstruieren wir für $q \in \{5, 6\}$ induktiv eine große Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta^*)$. Wir verwenden dazu die in Abschnitt 8.2 definierten minimal bestimmenden Mengen von $S_q^2(\Delta)$ auf einem Kegel und auf einem modifizierten Kegel.

Konstruktion minimal bestimmender Mengen:

Sei $\nu \geq 1$ und es gelte $\nu \notin \mathcal{N}^*$. Ist v_ν ein Randpunkt von $\Delta_{\nu-1}^*$, dann sei \mathcal{A}_{K_ν} wie in (8.33) gegeben. Ist $v_\nu \in V_I^*$ ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}^*$, dann sei für den Kegel $\tilde{K}_\nu = \Delta_{v_\nu} \setminus T^{[\nu,1]}$ die Menge $\mathcal{A}_{\tilde{K}_\nu}$ wie in (8.33) gegeben, und wir definieren $\mathcal{A}_{K_\nu} = \mathcal{A}_{\tilde{K}_\nu} \cup \{P_{i,j,k}^{[\nu,1]} : i > 2, i+j+k = q\}$. Ist $v_\nu \in V_B^*$ ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}^*$, dann gelte $\mathcal{A}_{K_\nu} = \{P_{i,j,k}^{[\nu,1]} : i > 2, i+j+k = q\}$.

Sei nun $\nu \geq 1$ und es gelte $\nu \in \mathcal{N}^*$. Ist v_ν ein Randpunkt von $\Delta_{\nu-1}^*$, dann sei $\mathcal{A}_{K_\nu^*}$ wie in (8.42) gegeben, falls ein Dreieck von K_ν^* durch einen Clough-Tochter-Split unterteilt ist, bzw. es sei $\mathcal{A}_{K_\nu^*}$ wie in (8.52) gegeben, falls zwei Dreiecke von K_ν^* durch einen Clough-Tochter-Split unterteilt sind. Ist $v_\nu \in V_I^*$ ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}^*$, dann sei für den Kegel $\tilde{K}_\nu^* = \Delta_{v_\nu} \setminus T^{[\nu,1]}$ die Menge $\mathcal{A}_{\tilde{K}_\nu^*}$ wie in (8.42) gegeben, falls ein Dreieck von \tilde{K}_ν^* durch einen Clough-Tochter-Split unterteilt ist, bzw. es sei $\mathcal{A}_{\tilde{K}_\nu^*}$ wie in (8.52) gegeben, falls zwei Dreiecke von \tilde{K}_ν^* durch einen Clough-Tochter-Split unterteilt sind. Dann setzen wir $\mathcal{A}_{K_\nu^*} = \mathcal{A}_{\tilde{K}_\nu^*} \cup \{P_{i,j,k}^{[\nu,1]} : i > 2, i+j+k = q\}$.

Für $\nu = 0, \dots, n$ definieren wir \mathcal{A}_ν induktiv durch

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &:= \mathcal{B}_q(\Delta_0), \\ \mathcal{A}_\nu &:= \begin{cases} \mathcal{A}_{\nu-1} \cup \mathcal{A}_{K_\nu}, & \text{falls } \nu \notin \mathcal{N}^* \text{ gilt,} \\ \mathcal{A}_{\nu-1} \cup \mathcal{A}_{K_\nu^*}, & \text{falls } \nu \in \mathcal{N}^* \text{ gilt,} \end{cases} \quad \nu = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Theorem 10.1. *Sei $q \in \{5, 6\}$ und sei $\Delta^* = \Delta_n^*$ wie in (10.1) gegeben. Dann ist \mathcal{A}_n wie in (10.2) eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta^*)$.*

Beweis. Sei $q \in \{5, 6\}$ und es gelte $s \in S_q^2(\Delta^*)$. Wir zeigen zunächst, dass \mathcal{A}_n eine bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta^*)$ ist. Es gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}_n$. Dann ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_q(\Delta^*)$ gilt. Wir zeigen im Folgenden, dass

$$\lambda_P s = 0, \quad P \in \mathcal{A}_\nu \quad \Rightarrow \quad \lambda_P s = 0, \quad P \in \mathcal{B}_q(\Delta_\nu^*), \quad \nu = 0, \dots, n, \quad (10.3)$$

gilt. Wegen $\Delta^* = \Delta_n^*$ folgt aus (10.3), dass \mathcal{A}_n eine bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta^*)$ ist.

Beweis von (10.3) durch vollständige Induktion nach ν .

Induktionsanfang $\nu = 0$. Da $\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}_q(\Delta_0)$ gilt, erhalten wir direkt (10.3).

Induktionsschritt $\nu - 1 \rightarrow \nu$. Die Behauptung (10.3) sei für $\nu - 1$ bereits bewiesen. Nach Definition von \mathcal{A}_ν folgt somit $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_q(\Delta_{\nu-1}^*) \cup R_2(K_\nu)$, falls $\nu \notin \mathcal{N}^*$ gilt, wobei $R_2(K_\nu)$ wie in (8.2) gegeben ist, bzw. es folgt $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_q(\Delta_{\nu-1}^*) \cup R_2(K_\nu^*)$, falls $\nu \in \mathcal{N}^*$ gilt, wobei $R_2(K_\nu^*)$ wie in (8.3) gegeben ist. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ gilt. Für $\nu \notin \mathcal{N}^*$ folgt die Behauptung direkt aus Theorem 8.19. Für $\nu \in \mathcal{N}^*$ folgt (10.3) aus Theorem 8.20 oder 8.21. Ist v_ν ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}^*$, folgt aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen an der Kante $\tilde{e}_{\nu,1}$, dass $\lambda_P s = 0$, $P \in \{P_{i,j,k}^{[\nu,1]} : i \leq 2, i+j+k=q\}$, gilt. Gilt $v_\nu \in V_B^*$, folgt (10.3) direkt aus der Definition von \mathcal{A}_{K_ν} . Für $v_\nu \in V_I^*$ folgt die Behauptung aus Theorem 8.19, 8.20 oder 8.21. \square

Es bleibt zu zeigen, dass \mathcal{A} minimal ist. Wir zeigen im Folgenden, dass für \mathcal{A}_ν , $\nu = 0, \dots, n$,

$$|\mathcal{A}_\nu| = \begin{cases} 21 + 6 |E_I^{*(\nu)}| - 15 |V_I^{*(\nu)}| + \sum_{v \in V_I^{*(\nu)}} \sigma_v & \text{für } q = 5, \\ 28 + 10 |E_I^{*(\nu)}| - 22 |V_I^{*(\nu)}| + \sum_{v \in V_I^{*(\nu)}} \sigma_v & \text{für } q = 6 \end{cases} \quad (10.4)$$

gilt.

Beweis von (10.4) durch vollständige Induktion nach ν .

Induktionsanfang $\nu = 0$. Offensichtlich gilt für $q = 5$ $|\mathcal{A}_0| = 21$ und für $q = 6$ $|\mathcal{A}_0| = 28$. Mit $E_I^{*(\nu)} = V_I^{*(\nu)} = \emptyset$ folgt dann (10.4).

Induktionsschritt $\nu - 1 \rightarrow \nu$. Die Behauptung (10.4) sei für $\nu - 1$ bereits bewiesen. Nach Konstruktion gilt $\sigma_{v_\nu} = 0$, $\nu = 1, \dots, n$.

Sei v_ν zunächst ein Randpunkt von $\Delta_{\nu-1}$. Gilt $\nu \notin \mathcal{N}^*$, dann sei λ gleich der Anzahl der inneren Kanten von K_ν . Es gilt $|E_I^{*(\nu)}| = |E_I^{*(\nu-1)}| + \lambda + 2$ und $|V_I^{*(\nu)}| = |V_I^{*(\nu-1)}| + 1$. Nach Konstruktion von \mathcal{A}_{K_ν} erhalten wir

$$|\mathcal{A}_\nu| = |\mathcal{A}_{\nu-1}| + \begin{cases} 6\lambda - 3 & \text{für } q = 5, \\ 10\lambda - 2 & \text{für } q = 6, \end{cases}$$

so dass nach Induktionsannahme (10.4) folgt. Gilt $\nu \in \mathcal{N}^*$, dann bezeichne $n_{\text{CT}} \in \{1, 2\}$ die Anzahl der Clough-Tochter-Dreiecke von K_ν^* . Ferner sei $\lambda + 3n_{\text{CT}}$ die Anzahl der inneren Kanten von K_ν^* . Für $n_{\text{CT}} = 1$ erhalten wir nach Konstruktion von $\mathcal{A}_{K_\nu^*}$

$$|\mathcal{A}_\nu| = |\mathcal{A}_{\nu-1}| + \begin{cases} 6\lambda + 1 & \text{für } q = 5, \\ 10\lambda + 7 & \text{für } q = 6. \end{cases}$$

Ferner gilt $|E_I^{*(\nu)}| = |E_I^{*(\nu-1)}| + \lambda + 5$ und $|V_I^{*(\nu)}| = |V_I^{*(\nu-1)}| + 2$ sowie $\sigma_{y_\nu} = 1$ für den Clough-Tochter-Punkt y_ν von K_ν^* . Nach Induktionsannahme folgt dann (10.4). Gilt

$n_{\text{CT}} = 2$, folgt nach Konstruktion von $\mathcal{A}_{K_\nu^*}$

$$|\mathcal{A}_\nu| = |\mathcal{A}_{\nu-1}| + \begin{cases} 6\lambda + 5 & \text{für } q = 5, \\ 10\lambda + 16 & \text{für } q = 6. \end{cases}$$

In diesem Fall gilt $|E_I^{*(\nu)}| = |E_I^{*(\nu-1)}| + \lambda + 8$ und $|V_I^{*(\nu)}| = |V_I^{*(\nu-1)}| + 3$ sowie $\sigma_{y_\nu^1} = \sigma_{y_\nu^2} = 1$ für die Clough-Tochter-Punkte y_ν^1 und y_ν^2 von K_ν^* . Nach Induktionsannahme folgt dann die Behauptung. Sei nun v_ν ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}^*$. Für $v_\nu \in V_B^*$ gilt offensichtlich

$$|\mathcal{A}_\nu| = |\mathcal{A}_{\nu-1}| + \begin{cases} 6 & \text{für } q = 5, \\ 10 & \text{für } q = 6. \end{cases}$$

Mit $|E_I^{*(\nu)}| = |E_I^{*(\nu-1)}| + 1$, $|V_I^{*(\nu)}| = |V_I^{*(\nu-1)}|$ und $\sigma_{v_\nu} = 0$ sowie nach Induktionsannahme folgt dann die Behauptung. Gilt $v_\nu \in V_I^*$, dann bezeichne n_{CT} wiederum die Anzahl der Clough-Tochter-Dreiecke von K_ν^* , falls $\nu \in \mathcal{N}^*$ gilt. Für $\nu \notin \mathcal{N}^*$ gelte $n_{\text{CT}} = 0$. Offensichtlich gilt dann $|E_I^{*(\nu)}| = |E_I^{*(\nu-1)}| + n_\nu + 1 + 3n_{\text{CT}}$, $|V_I^{*(\nu)}| = |V_I^{*(\nu-1)}| + 1 + n_{\text{CT}}$ und $\sum_{v \in V_I^{*(\nu)}} \sigma_v = \sum_{v \in V_I^{*(\nu-1)}} \sigma_v + n_{\text{CT}}$. Nach Konstruktion von \mathcal{A}_{K_ν} erhalten wir

$$|\mathcal{A}_\nu| = |\mathcal{A}_{\nu-1}| + \begin{cases} 6 n_\nu - 9 + 4 n_{\text{CT}}, & \text{für } q = 5, \\ 10 n_\nu - 12 + 9 n_{\text{CT}}, & \text{für } q = 6, \end{cases}$$

so dass nach Induktionsannahme die Behauptung (10.4) folgt. \square

Für $\nu = n$ folgt somit aus den Theoremen 2.3 und 2.4, dass $|\mathcal{A}_n| = \dim S_q^2(\Delta^*)$ gilt, d.h. \mathcal{A}_n ist eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta^*)$. \blacksquare

10.2 Hermite-Interpolation

Sei Δ^* , wie oben definiert, die modifizierte Triangulierung einer Triangulierung Δ , die mittels Algorithmus 2 so durchlaufen werden kann, dass keine Fills auftreten. Im Folgenden definieren wir analog zur Konstruktion der minimal bestimmenden Mengen von $S_q^2(\Delta^*)$, $q = 5, 6$, induktiv Hermite-Interpolationsbedingungen für $S_q^2(\Delta^*)$. Sei $s \in S_q^2(\Delta^*)$, $q = 5, 6$. Für $l = 1, \dots, n_\nu$ und $n = 1, \dots, n$ sei $p^{[\nu, l]} := s|_{T^{[\nu, l]}}$, falls $T^{[\nu, l]}$ nicht durch einen Clough-Tochter-Split unterteilt ist, und für $\mu = 1, 2, 3$ sei $p^{[\nu, (l, \mu)]} := s|_{T^{[\nu, (l, \mu)]}}$, falls $T^{[\nu, l]}$ modifiziert wurde. Sei $f \in C(\Omega)$ genügend oft differenzierbar. Ferner seien $D^\omega p^{[\nu, l]}$, $D^\omega f$ und $D^\omega p^{[\nu, (l, \mu)]}$ wie in (2.3) definiert. Wir betrachten zunächst den Fall $q = 5$.

Konstruktion von Hermite-Interpolationsmengen:

Fall 1: Es gilt $\nu = 0$.

s erfülle die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

- $D^\omega p^{[0,1]}(v_1) = D^\omega f(v_1)$, $\omega = 0, \dots, 5$.

Fall 2: Es gilt $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$, $\nu \notin \mathcal{N}^*$.

Es sei $l^* \in \{2, \dots, \lambda_\nu\}$ so gegeben, dass die Kanten e_{ν, l^*-2} , e_{ν, l^*-1} , e_{ν, l^*} und e_{ν, l^*+1} paarweise nicht kollinear sind. Dann erfülle s die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

- $D^\omega p^{[\nu, l]}(v_{\nu, l}) = D^\omega f(v_{\nu, l})$, $\omega = 0, 1, 2$, für $l = 1, \dots, \lambda$, $l \notin \{l^*-1, l^*\}$,
- $D^\omega p^{[\nu, l^*]}(v_{\nu, l^*}) = D^\omega f(v_{\nu, l^*})$, $\omega = 0, 1, 2$, außer $\frac{\partial^2 p^{[\nu, l^*]}}{\partial^2 e_{\nu, l^*}}(v_{\nu, l^*}) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 e_{\nu, l^*}}(v_{\nu, l^*})$,
- $D^\omega p^{[\nu, l^*-1]}(v_{\nu, l^*-1}) = D^\omega f(v_{\nu, l^*-1})$, $\omega = 0, 1$, und
- $\frac{\partial^2 p^{[\nu, l^*-1]}}{\partial^2 \tilde{e}_{\nu, l^*-1}}(v_{\nu, l^*-1}) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 \tilde{e}_{\nu, l^*-1}}(v_{\nu, l^*-1})$.

Fall 3: Es gilt $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$, $\nu \in \mathcal{N}^*$.

Enthält K_ν^* genau ein Clough-Tocher-Dreieck, dann sei $l^* \in \{1, \dots, \lambda-1\}$ der Index dieses Dreiecks. s erfülle die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

- $D^\omega p^{[\nu, l]}(v_{\nu, l}) = D^\omega f(v_{\nu, l})$, $\omega = 0, 1, 2$, für $l = 1, \dots, \lambda$, $l \neq l^*$,
- $D^\omega p^{[\nu, (l^*, 2)]}(v_{\nu, l^*}) = D^\omega f(v_{\nu, l^*})$, $\omega = 0, 1, 2$, außer $\frac{\partial^2 p^{[\nu, (l^*, 2)]}}{\partial^2 e_{\nu, l^*}}(v_{\nu, l^*}) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 e_{\nu, l^*}}(v_{\nu, l^*})$,
- $\frac{\partial^4 p^{[\nu, (l^*, 2)]}}{\partial^4 e_{\nu, (l^*, 1)}}(v_\nu) = \frac{\partial^4 f}{\partial^2 e_{\nu, (l^*, 1)}}(v_\nu)$ und $\frac{\partial^3 p^{[\nu, (l^*, 2)]}}{\partial^3 e_{\nu, (l^*, 2)}}(v_{\nu, l^*}) = \frac{\partial^3 f}{\partial^3 e_{\nu, (l^*, 2)}}(v_{\nu, l^*})$.

Enthält K_ν^* zwei Clough-Tocher-Dreiecke, sind nach Konstruktion die beiden Dreiecke $T^{[\nu, 1]}$ und $T^{[\nu, 2]}$ durch einen Clough-Tocher-Split unterteilt. Dann erfülle s die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

- $\frac{\partial^3 p^{[\nu, (1, 1)]}}{\partial^3 e_{\nu, (1, 1)}}(v_\nu) = \frac{\partial^3 f}{\partial^3 e_{\nu, (1, 1)}}(v_\nu)$, $\frac{\partial^4 p^{[\nu, (1, 1)]}}{\partial^4 e_{\nu, (1, 1)}}(v_\nu) = \frac{\partial^4 f}{\partial^4 e_{\nu, (1, 1)}}(v_\nu)$,
 $\frac{\partial^4 p^{[\nu, (1, 1)]}}{\partial^3 e_{\nu, (1, 1)} \partial e_{\nu, 0}}(v_\nu) = \frac{\partial^4 f}{\partial^3 e_{\nu, (1, 1)} \partial e_{\nu, 0}}(v_\nu)$, $\frac{\partial^3 p^{[\nu, (2, 1)]}}{\partial^3 e_{\nu, (2, 1)}}(v_\nu) = \frac{\partial^3 f}{\partial^3 e_{\nu, (2, 1)}}(v_\nu)$,
- $D^\omega p^{[\nu, (1, 2)]}(v_{\nu, 1}) = D^\omega f(v_{\nu, 1})$, $\omega = 0, 1, 2$, außer $\frac{\partial^2 p^{[\nu, (1, 2)]}}{\partial^2 e_{\nu, 1}}(v_{\nu, 1}) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 e_{\nu, 1}}(v_{\nu, 1})$,
- $\frac{\partial^3 p^{[\nu, (1, 2)]}}{\partial^3 e_{\nu, (1, 2)}}(v_{\nu, 1}) = \frac{\partial^3 f}{\partial^3 e_{\nu, (1, 2)}}(v_{\nu, 1})$ und $\frac{\partial^3 p^{[\nu, (2, 1)]}}{\partial^3 e_{\nu, (2, 3)}}(v_{\nu, 1}) = \frac{\partial^3 f}{\partial^3 e_{\nu, (2, 3)}}(v_{\nu, 1})$,
- $D^\omega p^{[\nu, 3]}(v_{\nu, 2}) = D^\omega f(v_{\nu, 2})$, $\omega = 0, 1, 2$, falls $\lambda = 2$ gilt.

Fall 4: v_ν ist ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$.

In diesem Fall erfülle s die Interpolationsbedingungen

- $D^\omega p^{[\nu,1]}(v_\nu) = D^\omega f(v_\nu)$, $\omega = 0, 1, 2$.

Gilt $v_\nu \in V_I^*$, dann erfülle s auf dem Kegel $\Delta_{v_\nu} \setminus T^{[\nu,1]}$ ferner die Hermite-Interpolationsbedingungen des Falls 1.

Theorem 10.2. *Sei $\Delta^* = \Delta_n^*$ wie in (10.1) gegeben. Dann ist V eine Hermite-Interpolationsmenge von $S_5^2(\Delta^*)$.*

Beweis. Analog zum Beweis von Theorem 10.1 folgt mit den Beziehungen (2.7) zwischen den partiellen Ableitungen und den Bézier-Koeffizienten von s , dass die Hermite-Interpolationsbedingungen die Bézier-Koeffizienten einer wie in (10.2) gegebenen minimal bestimmenden Menge \mathcal{A}_n von $S_5^2(\Delta^*)$ eindeutig bestimmen. Aus Theorem 10.1 folgt dann die Behauptung. ■

Sei nun $q = 6$.

Konstruktion von Hermite-Interpolationsmengen:

Fall 1: Es gilt $\nu = 0$.

s erfülle die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

- $D^\omega p^{[0,1]}(v_1) = D^\omega f(v_1)$, $\omega = 0, \dots, 6$.

Fall 2: Es gilt $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$, $\nu \notin \mathcal{N}^*$.

Es sei $l^* \in \{2, \dots, \lambda_\nu\}$ so gegeben, dass die Kanten e_{ν,l^*-2} , e_{ν,l^*-1} , e_{ν,l^*} und e_{ν,l^*+1} paarweise nicht kollinear sind. Dann erfülle s die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

- $D^\omega p^{[\nu,l]}(v_{\nu,l}) = D^\omega f(v_{\nu,l})$, $\omega = 0, 1, 2, 3$, für $l = 1, \dots, \lambda$, $l \notin \{l^*-1, l^*\}$,
- $D^\omega p^{[\nu,l]}(v_{\nu,l}) = D^\omega f(v_{\nu,l})$, $\omega = 0, 1, 2, 3$, außer $\frac{\partial^3 p^{[\nu,l]}}{\partial^3 e_{\nu,l}}(v_{\nu,l}) = \frac{\partial^3 f}{\partial^3 e_{\nu,l}}(v_{\nu,l})$ für $l = l^*-1, l^*$ sowie außer $\frac{\partial^3 p^{[\nu,l^*-1]}}{\partial^2 e_{\nu,l^*-1} \partial \tilde{e}_{\nu,l^*-1}}(v_{\nu,l^*-1}) = \frac{\partial^3 f}{\partial^2 e_{\nu,l^*-1} \partial \tilde{e}_{\nu,l^*-1}}(v_{\nu,l^*-1})$,
- $\frac{\partial^3 p^{[\nu,\lambda_\nu+1]}}{\partial^3 \tilde{e}_{\nu,\lambda_\nu+1}}(v_{\nu,\lambda_\nu+1}) = \frac{\partial^3 f}{\partial^3 \tilde{e}_{\nu,\lambda_\nu+1}}(v_{\nu,\lambda_\nu+1})$.

Fall 3: Es gilt $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$, $\nu \in \mathcal{N}^*$.

Enthält K_ν^* genau ein Clough-Tochter-Dreieck, dann sei $l^* \in \{1, \dots, \lambda-1\}$ der Index dieses Dreiecks. s erfülle die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

- $D^\omega p^{[\nu,l]}(v_{\nu,l}) = D^\omega f(v_{\nu,l})$, $\omega = 0, \dots, 3$, für $l = 1, \dots, \lambda_\nu$, $l \neq l^*$,
- $\frac{\partial^3 p^{[\nu,(l^*,3)]}}{\partial^3 \tilde{e}_{\nu,(l^*,3)}}(v_{\nu,l^*-1}) = \frac{\partial^3 f}{\partial^3 \tilde{e}_{\nu,(l^*,3)}}(v_{\nu,l^*-1})$, $\frac{\partial^3 p^{[\nu,\lambda_\nu+1]}}{\partial^3 \tilde{e}_{\nu,\lambda_\nu+1}}(v_{\nu,\lambda_\nu+1}) = \frac{\partial^3 f}{\partial^3 \tilde{e}_{\nu,\lambda_\nu+1}}(v_{\nu,\lambda_\nu+1})$,

- $D^\omega p^{[\nu, l^*+1]}(v_{\nu, l^*}) = D^\omega f(v_{\nu, l^*})$ für $\omega = 0, 1, 2$,
- $D^\omega p^{[\nu, (l^*, 1)]}(y_{\nu, l^*}) = D^\omega f(y_{\nu, l^*})$ für $\omega = 0, \dots, 3$, außer $\frac{\partial^3 p^{[\nu, (l^*, 1)]}}{\partial^3 e_{\nu, (l^*, 1)}}(y_{\nu, l^*}) = \frac{\partial^3 f}{\partial^3 e_{\nu, (l^*, 1)}}(y_{\nu, l^*})$.

Enthält K_ν^* hingegen zwei Clough-Tochter-Dreiecke, dann erfülle s die Bedingungen:

- $D^\omega p^{[\nu, (1, 1)]}(y_{\nu, 1}) = D^\omega f(y_{\nu, 1})$, $\omega = 0, \dots, 3$,
- $D^\omega p^{[\nu, (2, 2)]}(y_{\nu, 2}) = D^\omega f(y_{\nu, 2})$, $\omega = 0, \dots, 3$, außer $\frac{\partial^3 p^{[\nu, (2, 2)]}}{\partial^3 e_{\nu, (2, 1)}}(y_{\nu, 2}) = \frac{\partial^3 f}{\partial^3 e_{\nu, (2, 1)}}(y_{\nu, 2})$,
- $\frac{\partial^4 p^{[\nu, (1, 2)]}}{\partial^4 e_{\nu, (1, 2)}}(y_{\nu, 1}) = \frac{\partial^4 f}{\partial^4 e_{\nu, (1, 2)}}(y_{\nu, 1})$, $\frac{\partial^4 p^{[\nu, (2, 3)]}}{\partial^4 e_{\nu, (2, 3)}}(y_{\nu, 2}) = \frac{\partial^4 f}{\partial^4 e_{\nu, (2, 3)}}(y_{\nu, 2})$,
- $\frac{\partial^\rho p^{[\nu, (1, 2)]}}{\partial^\rho e_{\nu, 1}}(v_{\nu, 1}) = \frac{\partial^\rho f}{\partial^\rho e_{\nu, 1}}(v_{\nu, 1})$, $\rho = 0, 1, 2$,
- $\frac{\partial^3 p^{[\nu, (1, 3)]}}{\partial^3 \tilde{e}_{\nu, (1, 3)}}(v_{\nu, 0}) = \frac{\partial^3 f}{\partial^3 \tilde{e}_{\nu, (1, 3)}}(v_{\nu, 0})$, $\frac{\partial^3 p^{[\nu, (2, 3)]}}{\partial^3 \tilde{e}_{\nu, (2, 3)}}(v_{\nu, 2}) = \frac{\partial^3 f}{\partial^3 \tilde{e}_{\nu, (2, 3)}}(v_{\nu, 2})$,
- $D^\omega p^{[\nu, 3]}(v_{\nu, 2}) = D^\omega f(v_{\nu, 2})$, $\omega = 0, \dots, 3$, falls $\lambda = 2$ gilt.

Fall 4: v_ν ist ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$.

In diesem Fall erfülle s die Interpolationsbedingungen

- $D^\omega p^{[\nu, 1]}(v_\nu) = D^\omega f(v_\nu)$, $\omega = 0, 1, 2, 3$.

Gilt $v_\nu \in V_I^*$, dann erfülle s auf dem Kegel $\Delta_{v_\nu} \setminus T^{[\nu, 1]}$ ferner die Hermite-Interpolationsbedingungen des Falls 1.

Theorem 10.3. Sei $\Delta^* = \Delta_n^*$ wie in (10.1) gegeben. Dann ist V eine Hermite-Interpolationsmenge von $S_6^2(\Delta^*)$.

Beweis. Analog zum Beweis von Theorem 10.1 folgt mit den Beziehungen (2.7) zwischen den partiellen Ableitungen und den Bézier-Koeffizienten von s , dass die Hermite-Interpolationsbedingungen die Bézier-Koeffizienten einer minimal bestimmenden Menge \mathcal{A}_n von $S_6^2(\Delta^*)$, die wie in (10.2) gegeben ist, eindeutig bestimmen. Aus Theorem 10.1 folgt dann die Behauptung. ■

10.3 Lagrange-Interpolation

Die Triangulierung $\Delta^* = \Delta_n^*$ sei induktiv wie in (10.1) definiert. Im Folgenden geben wir ein Lagrange-Interpolationsschema für $S_5^2(\Delta^*)$ an. Wir wählen zunächst eine Interpolationsmenge \mathcal{L}_0 im Startdreieck $T^{[1, n_1]} = \Delta_0$. Anschließend betrachten wir die Dreiecke in

$\Delta_\nu^* \setminus \Delta_{\nu-1}^*$, $\nu = 1, \dots, n$, und wählen sukzessive weitere Interpolationspunkte. Wir zeigen, dass wir auf diese Weise eine allgemeine Klasse von Lagrange-Interpolationsmengen für $S_5^2(\Delta^*)$ erhalten.

Konstruktion von Lagrange-Interpolationsmengen:

Nach Definition gilt $\Delta_0 = T^{[1, n_1]}$. Die Menge \mathcal{L}_0 enthalte die folgenden Punkte:

(10.5) die Eckpunkte $v_1, v_{1,0}, v_{1, n_1-1}$,

(10.6) vier verschiedene Punkte im Inneren jeder Kante von $T^{[1, n_1]}$,

(10.7) sechs verschiedene Punkte $z_{1, n_1}^{(1)}, \dots, z_{1, n_1}^{(6)}$ im Inneren von $T^{[1, n_1]}$, welche eindeutige Lagrange-Interpolation mit $\tilde{\Pi}_2$ zulassen. (Wir wählen beispielsweise drei parallele Geraden L_i in $T^{[1, n_1]}$ und i verschiedene Punkte auf jeder Geraden L_i , $i = 1, 2, 3$.)

Für $\nu \geq 1$ wählen wir die Interpolationspunkte wie folgt.

Fall 1: Es gilt $v_\nu \in V_B^{*(\nu-1)}$, $\nu \notin \mathcal{N}^*$.

Es sei $l^* \in \{2, \dots, \lambda_\nu\}$ so gegeben, dass die Kanten $e_{\nu, l}$ für $l^* - 2 \leq l \leq l^* + 1$ paarweise nicht kollinear sind. Ferner sei $\tilde{l} \in \{1, \dots, \lambda_\nu\}$ so gegeben, dass die Kante $e_{\nu, \tilde{l}}$ bzgl. v_ν nicht degeneriert ist. Dann enthalte \mathcal{L}_ν die folgenden Interpolationspunkte:

(10.8) für $l = 1, \dots, \lambda_\nu$, $l \neq l^*, l^* - 1$, je drei Punkte $w_{\nu, l}^{(1)}, w_{\nu, l}^{(2)}, w_{\nu, l}^{(3)}$ im Inneren der Kante $e_{\nu, l}$ und für $l = l^*, l^* - 1$ je zwei Punkte $w_{\nu, l}^{(1)}, w_{\nu, l}^{(2)}$ im Inneren der Kante $e_{\nu, l}$,

(10.9) für $l = 1, \dots, \lambda_\nu + 1$, $l \neq \tilde{l}$, je zwei Punkte $\tilde{w}_{\nu, l}^{(1)}, \tilde{w}_{\nu, l}^{(2)}$ im Inneren der Kante $\tilde{e}_{\nu, l}$ und

(10.10) für $l = 1, \dots, \lambda_{\nu+1}$, $l \neq \tilde{l}, \tilde{l} + 1$, je einen Punkt $z_{\nu, l}$ im Inneren von $T^{[\nu, l]}$.

Fall 2: Es gilt $\nu \in \mathcal{N}^*$ und K_ν^* enthält genau ein Clough-Tocher-Dreieck.

Es sei \tilde{l} der Index des modifizierten Dreiecks. Wir nummerieren die Kanten von K_ν^* mit Eckpunkt v_ν ausgehend von $e_{\nu, 0}$ mit e_l^* , $l = 1, \dots, \lambda_\nu + 2$. Dann sei $l^* \in \{2, \dots, \lambda_\nu + 1\}$ so gegeben, dass die Kanten $e_{l^*-2}^*, e_{l^*-1}^*, e_{l^*}^*, e_{l^*+1}^*$ paarweise nicht kollinear sind. \mathcal{L}_ν enthalte die folgenden Interpolationspunkte:

(10.11) für $l = 1, \dots, \lambda_\nu + 1$, $l \neq l^*, l^* - 1$, je drei Punkte $w_{\nu, l}^{*(1)}, w_{\nu, l}^{*(2)}, w_{\nu, l}^{*(3)}$ im Inneren der Kante e_l^* und für $l = l^*, l^* - 1$ je zwei Punkte $w_{\nu, l}^{*(1)}, w_{\nu, l}^{*(2)}$ im Inneren der Kante e_l^* ,

(10.12) für $l = 1, \dots, \lambda_\nu + 1$, $l \neq \tilde{l}, \tilde{l} + 1$, je zwei Punkte $\tilde{w}_{\nu, l}^{(1)}, \tilde{w}_{\nu, l}^{(2)}$ im Inneren der Kante $\tilde{e}_{\nu, l}$ und je einen Punkt $z_{\nu, l}$ im Inneren von $T^{[\nu, l]}$ und

(10.13) entweder zwei Punkte $w_{\nu,(\tilde{l},3)}^{(1)}, w_{\nu,(\tilde{l},3)}^{(2)}$ im Inneren der Kante $e_{\nu,(\tilde{l},3)}$ und einen Punkt $z_{\nu,(\tilde{l},1)}$ im Inneren von $T^{[\nu,(\tilde{l},1)]}$ oder zwei Punkte $\tilde{w}_{\nu,\tilde{l}+1}^{(1)}, \tilde{w}_{\nu,\tilde{l}+1}^{(2)}$ im Inneren der Kante $\tilde{e}_{\nu,\tilde{l}+1}$ und einen Punkt $z_{\nu,\tilde{l}+1}$ im Inneren von $T^{[\nu,\tilde{l}+1]}$.

Fall 3: Es gilt $\nu \in \mathcal{N}^*$ und v_ν ist bzgl. $\Delta_{\nu-1}^*$ semisingulär, d. h. die Dreiecke $T^{[\nu,1]}$ und $T^{[\nu,2]}$ sind durch einen Clough-Tochter-Split unterteilt.

Wir nummerieren die Kanten von K_ν^* mit Eckpunkt v_ν ausgehend von $e_{\nu,0}$ mit e_l^* , $l = 1, \dots, \lambda_\nu + 2$. Dann sei $l^* \in \{2, \dots, \lambda_\nu + 1\}$ so gegeben, dass die Kanten $e_{l^*-2}^*, e_{l^*-1}^*, e_{l^*}^*, e_{l^*+1}^*$ paarweise nicht kollinear sind. \mathcal{L}_ν enthalte die folgenden Interpolationspunkte:

(10.14) für $l = 1, \dots, \lambda_\nu + 2$, $l \neq l^*, l^* - 1$, je drei Punkte $w_{\nu,l}^{*(1)}, w_{\nu,l}^{*(2)}, w_{\nu,l}^{*(3)}$ im Inneren der Kante e_l^* und für $l = l^*, l^* - 1$ je zwei Punkte $w_{\nu,l}^{*(1)}, w_{\nu,l}^{*(2)}$ im Inneren der Kante e_l^* ,

(10.15) zwei Punkte $\tilde{w}_{\nu,3}^{(1)}, \tilde{w}_{\nu,3}^{(2)}$ im Inneren der Kante $\tilde{e}_{\nu,3}$ und einen Punkt $z_{\nu,3}$ im Inneren von $T^{[\nu,3]}$, falls $\lambda = 2$ gilt, und

(10.16) entweder zwei Punkte $w_{\nu,(1,3)}^{(1)}, w_{\nu,(1,3)}^{(2)}$ im Inneren der Kante $e_{\nu,(1,3)}$, einen Punkt $z_{\nu,(1,1)}$ im Inneren von $T^{[\nu,(1,1)]}$ und einen Punkt $w_{\nu,(1,2)}^{(1)}$ im Inneren von $e_{\nu,(1,2)}$ oder zwei Punkte $w_{\nu,(2,2)}^{(1)}, w_{\nu,(2,2)}^{(2)}$ im Inneren der Kante $e_{\nu,(2,2)}$, einen Punkt $z_{\nu,(2,2)}$ im Inneren von $T^{[\nu,(2,2)]}$ und einen Punkt $w_{\nu,(2,3)}^{(1)}$ im Inneren von $e_{\nu,(2,3)}$.

Fall 4: v_ν ist ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}^*$.

\mathcal{L}_ν enthalte die folgenden Interpolationspunkte:

(10.17) den Eckpunkt v_ν , je zwei Punkte $w_{\nu,l}^{(1)}, w_{\nu,l}^{(2)}$ im Inneren der Kante $e_{\nu,l}$ für $l = 0, 1$ sowie einen Punkt $z_{\nu,1}$ im Inneren von $T^{[\nu,1]}$.

Gilt $v_\nu \in V_I^*$, dann enthalte \mathcal{L}_ν ferner für den Kegel $\Delta_{v_\nu} \setminus T^{[\nu,1]}$ die Interpolationspunkte der Fälle 1 bis 3.

Theorem 10.4. Sei $\Delta^* = \Delta_n^*$ wie in (10.1) gegeben. Dann ist $\mathcal{L} = \cup_{\nu=0}^n \mathcal{L}_\nu$ eine Lagrange-Interpolationsmenge von $S_5^2(\Delta^*)$.

Beweis. Sei $s \in S_5^2(\Delta^*)$ und es gelte $s(z) = 0$ für alle $z \in \mathcal{L}$. Wir zeigen im Folgenden, dass

$$s(z) = 0, \quad z \in \cup_{\mu=0}^\nu \mathcal{L}_\mu \quad \Rightarrow \quad s|_{\Omega_\nu} \equiv 0, \quad \nu = 0, \dots, n, \quad (10.18)$$

gilt.

Beweis von (10.18) durch vollständige Induktion nach ν .

Induktionsanfang $\nu = 0$. Es ist zu zeigen, dass $s(z) = 0$ für alle $z \in T^{[1, n_1]}$ gilt. Sei $e \in \{e_{1,0}, e_{1, n_1-1}, \tilde{e}_{1, n_1}\}$. Dann gilt $s|_e \in \Pi_5$ und nach Voraussetzung verschwindet $s|_e$ auf sechs verschiedenen Punkten von e . Somit folgt direkt $s(z) = 0$, $z \in e_{1,0} \cup e_{1, n_1-1} \cup \tilde{e}_{1, n_1}$, und wir erhalten

$$s|_{T^{[1, n_1]}}(z) \equiv l_1(z) l_2(z) l_3(z) p(z),$$

wobei $l_i(z) = 0$, $i = 1, 2, 3$, die Gleichung für die Gerade ist, welche die Kante $e_{1,0}$, e_{1, n_1-1} bzw. \tilde{e}_{1, n_1} enthält, und $p(z)$ ein Polynom aus $\tilde{\Pi}_2$ ist. Es gilt

$$p(z_{1, n_1}^{(1)}) = \dots = p(z_{1, n_1}^{(6)}) = 0$$

und somit $p(z) \equiv 0$, d. h. es gilt $s(z) = 0$, $z \in T^{[1, n_1]}$.

Induktionsschritt $\nu - 1 \rightarrow \nu$. Die Behauptung (10.18) sei für $\nu - 1$ bereits bewiesen. Somit gilt $s|_{\Omega_{\nu-1}} \equiv 0$.

Fall 1: Es gilt $v_\nu \in V_B^{*(\nu-1)}$, $\nu \notin \mathcal{N}^*$. Ferner enthält \mathcal{L}_ν für geeignetes $l^* \in \{2, \dots, \lambda_\nu\}$ und $\tilde{l} \in \{1, \dots, \lambda_\nu\}$ die Interpolationspunkte (10.8) bis (10.10). Es ist zu zeigen, dass $p^{[\nu, l]} := s|_{T^{[\nu, l]}} \equiv 0$, $l = 1, \dots, \lambda_\nu + 1$, gilt. Da s ein C^2 -Spline ist, folgt, dass die Funktionswerte und alle ersten und zweiten Ableitungen von $p^{[\nu, l]} \in \tilde{\Pi}_5$ und $p^{[\nu, \lambda_\nu+1]} \in \tilde{\Pi}_5$ auf $e_{\nu,0}$ bzw. $e_{\nu, \lambda_\nu+1}$ verschwinden. Ferner gilt $D^\omega p^{[\nu, l]}(v_\nu) = 0$ für $\omega = 0, 1, 2$ und $l = 1, \dots, \lambda_\nu + 1$. Für $l = 1, \dots, \lambda_\nu + 1$ sei $q_{\nu, l} := s|_{e_{\nu, l}} \in \Pi_5$. Dann gilt nach Konstruktion von \mathcal{L}_ν für $l = 1, \dots, \lambda_\nu$, $l \neq l^*, l^* - 1$,

$$q_{\nu, l}(v_\nu) = q'_{\nu, l}(v_\nu) = q''_{\nu, l}(v_\nu) = q_{\nu, l}(w_{\nu, l}^{(1)}) = q_{\nu, l}(w_{\nu, l}^{(2)}) = q_{\nu, l}(w_{\nu, l}^{(3)}) = 0.$$

Wir erhalten somit $s(z) = 0$ für alle $z \in e_{\nu, l}$, $l = 1, \dots, \lambda_\nu$, $l \neq l^*, l^* - 1$. Dann gilt insbesondere $q'''_{\nu, l}(v_\nu) = 0$, $l = 1, \dots, \lambda_\nu$, $l \neq l^*, l^* - 1$, so dass mit den Beziehungen (2.7) und (2.8) aus Korollar 8.1

$$D^\omega p^{[\nu, l]}(v_\nu) = 0, \quad \omega = 0, \dots, 3, \quad l = 1, \dots, \lambda_\nu + 1,$$

folgt. Somit folgt für $l = l^*, l^* - 1$, dass

$$q_{\nu, l}(v_\nu) = q'_{\nu, l}(v_\nu) = q''_{\nu, l}(v_\nu) = q'''_{\nu, l}(v_\nu) = q_{\nu, l}(w_{\nu, l}^{(1)}) = q_{\nu, l}(w_{\nu, l}^{(2)}) = 0$$

gilt, so dass wir

$$s(z) = 0, \quad z \in e_{\nu, l}, \quad l = 0, \dots, \lambda_\nu + 1, \quad (10.19)$$

erhalten. Nach Konstruktion enthält \mathcal{L}_ν die Punkte (10.9) und (10.10). O.B.d.A. gelte $\tilde{l} > 1$. Für $l = 1, \dots, \lambda_\nu + 1$ sei $\tilde{q}_{\nu, l} := s|_{\tilde{e}_{\nu, l}} \in \Pi_5$. Nach Konstruktion von \mathcal{L}_ν folgt

$$\tilde{q}_{\nu, 1}(v_{\nu, 0}) = \tilde{q}'_{\nu, 1}(v_{\nu, 0}) = \tilde{q}''_{\nu, 1}(v_{\nu, 0}) = \tilde{q}_{\nu, 1}(\tilde{w}_{\nu, 1}^{(1)}) = \tilde{q}_{\nu, 1}(\tilde{w}_{\nu, 1}^{(2)}) = \tilde{q}_{\nu, 1}(v_{\nu, 1}) = 0,$$

und wir erhalten $s(z) = 0$ für alle $z \in \tilde{e}_{\nu,1}$. Mit (10.19) folgt somit

$$p^{[\nu,1]}(z) \equiv (l_1(z))^2 l_2(z) l_3(z) p(z),$$

wobei $l_i(z) = 0$, $i = 1, 2, 3$, die Gleichung für die Gerade ist, welche die Kante $e_{\nu,0}$, $e_{\nu,1}$ bzw. $\tilde{e}_{\nu,1}$ enthält, und $p(z)$ ein Polynom aus $\tilde{\Pi}_0$ ist. Da nach Konstruktion $p(z_{\nu,1}) = 0$ gilt, folgt direkt $s(z) = 0$, $z \in T^{[\nu,1]}$. Analog lässt sich induktiv zeigen, dass $s(z) = 0$, $z \in T^{[\nu,l]}$, für $l = 1, \dots, \lambda_\nu + 1$, $l \neq \tilde{l}, \tilde{l} + 1$, gilt. Dann folgt mit (2.7) und (2.8) aus Korollar 8.11

$$D^\omega p^{[\nu,l]}(v_\nu) = 0, \quad \omega = 0, \dots, 4, \quad l = 1, \dots, \lambda_\nu + 1.$$

Analog zu oben erhalten wir wegen $\tilde{w}_{\nu,\tilde{l}+1}^{(1)}, \tilde{w}_{\nu,\tilde{l}+1}^{(2)} \in \mathcal{L}_\nu$, dass $s(z) = 0$ für alle $z \in \tilde{e}_{\nu,\tilde{l}+1}$ gilt. Somit gilt insbesondere $s(z) = 0$, $z \in T^{[\nu,\tilde{l}+1]}$. Aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen an den Eckpunkten $v_{\nu,\tilde{l}}$ und $v_{\nu,\tilde{l}-1}$ folgt dann bereits die Behauptung (10.18). Für $\tilde{l} = 1$ folgt die Behauptung analog.

Fall 2: Es gilt $\nu \in \mathcal{N}^*$ und K_ν^* enthält genau ein Clough-Tochter-Dreieck. \mathcal{L}_ν enthält die Punkte (10.11) bis (10.13). Da s ein C^2 -Spline ist, folgt, dass die Funktionswerte und alle ersten und zweiten Ableitungen von $p^{[\nu,1]}$ oder $p^{[\nu,(1,1)]} \in \tilde{\Pi}_5$ und $p^{[\nu,\lambda_\nu+1]} \in \tilde{\Pi}_5$ auf $e_{\nu,0}$ bzw. $e_{\nu,\lambda_\nu+1}$ verschwinden. Ferner gilt $D^\omega p^{[\nu,l]}(v_\nu) = 0$ für $\omega = 0, 1, 2$ und $l = 1, \dots, \lambda_\nu + 1$, $l \neq \tilde{l}$, sowie für $l = (\tilde{l}, 1), (\tilde{l}, 2)$. Da \mathcal{L}_ν die Punkte (10.11) enthält, erhalten wir analog zum Beweis von Fall 1

$$\begin{aligned} D^\omega p^{[\nu,l]}(v_\nu) &= 0, & \omega &= 0, \dots, 3, & l &= 1, \dots, \lambda_\nu + 1, l \neq \tilde{l}, \\ D^\omega p^{[\nu,(\tilde{l},\mu)]}(v_\nu) &= 0, & \omega &= 0, \dots, 3, & \mu &= 1, 2, \end{aligned}$$

und

$$s(z) = 0, \quad z \in e_{\nu,l}, \quad l = 0, \dots, \lambda_\nu + 1, (\tilde{l}, 1).$$

Da \mathcal{L}_ν ferner die Punkte (10.12) enthält, folgt analog zum Beweis von Fall 1, dass $s(z) = 0$, $z \in T^{[\nu,l]}$, für $l = 1, \dots, \lambda_\nu + 1$, $l \neq \tilde{l}, \tilde{l} + 1$, gilt. Nach Konstruktion enthält \mathcal{L}_ν die Punkte (10.13), so dass ebenfalls analog zum Beweis von Fall 1 $s(z) = 0$ für alle $z \in T^{[\nu,\tilde{l}+1]}$ bzw. für alle $z \in T^{[\nu,(\tilde{l},1)]}$ folgt. Mit (2.8) folgt analog zum Beweis von Theorem 8.20 die Behauptung.

Fall 3: Es gilt $\nu \in \mathcal{N}^*$ und v_ν ist bzgl. $\Delta_{\nu-1}^*$ semisingulär, d. h. die Dreiecke $T^{[\nu,1]}$ und $T^{[\nu,2]}$ sind durch einen Clough-Tochter-Split unterteilt. \mathcal{L}_ν enthält die Punkte (10.14) und (10.16) sowie die Punkte (10.15), falls $\lambda_\nu = 2$ gilt. Da s ein C^2 -Spline ist, folgt, dass die Funktionswerte und alle ersten und zweiten Ableitungen von $p^{[\nu,(1,1)]} \in \tilde{\Pi}_5$ sowie von $p^{[\nu,(2,2)]} \in \tilde{\Pi}_5$, falls $\lambda_\nu = 1$ gilt, bzw. von $p^{[\nu,3]} \in \tilde{\Pi}_5$, falls $\lambda_\nu = 2$ gilt, auf $e_{\nu,0}$ und $e_{\nu,2}$ bzw. auf $e_{\nu,0}$ und $e_{\nu,3}$ verschwinden. Ferner gilt $D^\omega p^{[\nu,(l,\mu)]}(v_\nu) = 0$ für $\omega = 0, 1, 2$, $l = 1, 2$ und

$\mu = 1, 2$ sowie $D^\omega p^{[\nu,3]}(v_\nu) = 0$ für $\omega = 0, 1, 2$, falls $\lambda_\nu = 2$ gilt. Da \mathcal{L}_ν die Punkte (10.14) enthält, folgt analog zum Beweis von Fall 1

$$D^\omega p^{[\nu,(l,\mu)]}(v_\nu) = 0, \quad \omega = 0, \dots, 3, \quad l = 1, 2, \quad \mu = 1, 2,$$

und

$$D^\omega p^{[\nu,3]}(v_\nu) = 0, \quad \omega = 0, \dots, 3,$$

falls $\lambda_\nu = 2$ gilt. Ferner erhalten wir $s(z) = 0$ für alle $z \in e_{\nu,l}$, $l = 0, \dots, \lambda_\nu + 1$, $(1, 1)$, $(2, 2)$. Gilt $\lambda_\nu = 2$, folgt mit (10.15) analog zum Beweis von Fall 1 $s(z) = 0$, $z \in T^{[\nu,3]}$. Da \mathcal{L}_ν die Punkte (10.16) enthält, erhalten wir analog zu Fall 1 $s(z) = 0$, $z \in T^{[\nu,(1,3)]}$. Mit (2.8) folgt dann analog zum Beweis von Theorem 8.21 bereits die Behauptung.

Fall 4: v_ν ist ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}^*$. Da s ein C^2 -Spline ist, folgt, dass die Funktionswerte und alle ersten und zweiten Ableitungen von $p^{[\nu,1]} \in \tilde{\Pi}_5$ auf $\tilde{e}_{\nu,1}$ verschwinden. Für $l = 0, 1$ sei $q_{\nu,l} = s|_{e_{\nu,l}} \in \Pi_5$. Nach Konstruktion von \mathcal{L}_ν gilt dann

$$q_{\nu,l}(v_{\nu,l}) = q'_{\nu,l}(v_{\nu,l}) = q''_{\nu,l}(v_{\nu,l}) = q_{\nu,l}(w_{\nu,l}^{(1)}) = q_{\nu,l}(w_{\nu,l}^{(2)}) = q_{\nu,l}(v_\nu) = 0, \quad l = 0, 1,$$

und somit $s(z) = 0$, $z \in e_{\nu,0} \cup e_{\nu,1}$. Da $z_{\nu,1} \in \mathcal{L}_\nu$ gilt, folgt analog zum Beweis von Fall 1 $s(z) = 0$, $z \in T^{[\nu,1]}$. Für $v_\nu \in V_I^*$ folgt (10.18) analog zu den Beweisen der Fälle 1 bis 3. \square

Somit bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{L} = \dim S_5^2(\Delta^*)$ gilt. Wir zeigen im Folgenden, dass für $\nu = 0, \dots, n$

$$\left| \sum_{\mu=0}^{\nu} \mathcal{L}_\mu \right| = 21 + 6 |E_I^{*(\mu)}| - 15 |V_I^{*(\mu)}| + \sum_{v \in V_I^{*(\mu)}} \sigma_v \quad (10.20)$$

gilt.

Beweis von (10.20) durch vollständige Induktion nach ν .

Induktionsanfang $\nu = 0$. Offensichtlich gilt $|\mathcal{L}_0| = 21$. Wegen $E_I^{*(\nu)} = V_I^{*(\nu)} = \emptyset$ folgt dann bereits (10.20).

Induktionsschritt $\nu - 1 \rightarrow \nu$. (10.20) sei für $\nu - 1$ bereits bewiesen. Nach Konstruktion gilt $\sigma_{v_\nu} = 0$, $\nu = 1, \dots, n$.

Sei v_ν zunächst ein Randpunkt von $\Delta_{\nu-1}$. Gilt $\nu \notin \mathcal{N}^*$, dann sei λ gleich der Anzahl der inneren Kanten von K_ν . Es gilt $|E_I^{*(\nu)}| = |E_I^{*(\nu-1)}| + \lambda + 2$ und $|V_I^{*(\nu)}| = |V_I^{*(\nu-1)}| + 1$. Nach Konstruktion von \mathcal{L}_{K_ν} erhalten wir

$$|\mathcal{L}_\nu| = |\mathcal{L}_{\nu-1}| + 6\lambda - 3,$$

so dass nach Induktionsannahme (10.20) folgt. Gilt $\nu \in \mathcal{N}^*$, bezeichne $n_{\text{CT}} \in \{1, 2\}$ die Anzahl der Clough-Tochter-Dreiecke von K_ν^* . Ferner sei $\lambda + 3n_{\text{CT}}$ die Anzahl der inneren

Kanten von K_ν^* . Für $n_{\text{CT}} = 1$ erhalten wir nach Konstruktion von $\mathcal{L}_{K_\nu^*}$

$$|\mathcal{L}_\nu| = |\mathcal{L}_{\nu-1}| + 6\lambda + 1.$$

Ferner gilt $|E_I^{*(\nu)}| = |E_I^{*(\nu-1)}| + \lambda + 5$ und $|V_I^{*(\nu)}| = |V_I^{*(\nu-1)}| + 2$ sowie $\sigma_{y_\nu} = 1$ für den Clough-Tochter-Punkt y_ν von K_ν^* . Nach Induktionsannahme folgt dann (10.20). Ist $n_{\text{CT}} = 2$, gilt nach Konstruktion von $\mathcal{L}_{K_\nu^*}$

$$|\mathcal{L}_\nu| = |\mathcal{L}_{\nu-1}| + 6\lambda + 5.$$

In diesem Fall gilt $|E_I^{*(\nu)}| = |E_I^{*(\nu-1)}| + \lambda + 8$ und $|V_I^{*(\nu)}| = |V_I^{*(\nu-1)}| + 3$ sowie $\sigma_{y_\nu^1} = \sigma_{y_\nu^2} = 1$ für die Clough-Tochter-Punkte y_ν^1 und y_ν^2 von K_ν^* . Nach Induktionsannahme folgt dann die Behauptung. Sei nun v_ν ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}^*$. Für $v_\nu \in V_B^*$ gilt offensichtlich

$$|\mathcal{L}_\nu| = |\mathcal{L}_{\nu-1}| + 6.$$

Mit $|E_I^{*(\nu)}| = |E_I^{*(\nu-1)}| + 1$, $|V_I^{*(\nu)}| = |V_I^{*(\nu-1)}|$ und $\sigma_{v_\nu} = 0$ sowie nach Induktionsannahme folgt dann die Behauptung. Gilt $v_\nu \in V_I^*$, bezeichne n_{CT} die Anzahl der Clough-Tochter-Dreiecke von K_ν^* , falls $\nu \in \mathcal{N}^*$ gilt. Für $\nu \notin \mathcal{N}^*$ gelte $n_{\text{CT}} = 0$. Offensichtlich gilt dann $|E_I^{*(\nu)}| = |E_I^{*(\nu-1)}| + n_\nu + 1 + 3n_{\text{CT}}$, $|V_I^{*(\nu)}| = |V_I^{*(\nu-1)}| + 1 + n_{\text{CT}}$ und $\sum_{v \in V_I^{*(\nu)}} \sigma_v = \sum_{v \in V_I^{*(\nu-1)}} \sigma_v + n_{\text{CT}}$. Nach Konstruktion von \mathcal{L}_ν erhalten wir

$$|\mathcal{L}_\nu| = |\mathcal{L}_{\nu-1}| + 6n_\nu - 9 + 4n_{\text{CT}},$$

so dass nach Induktionsannahme (10.20) folgt. ■

Kapitel 11

Der Splineraum $S_7^2(\Delta)$

Sei Δ eine beliebige Triangulierung. In diesem Kapitel betrachten wir den Splineraum $S_7^2(\Delta)$. Nürnberger & Zeilfelder [49] gaben für Triangulierungen, die induktiv aus Kegeln aufgebaut werden und keine Semisingularitäten enthalten, eine spezielle minimal bestimmende Menge von $S_7^2(\Delta)$ an. Wir konstruieren in Abschnitt 11.1 allgemeine Klassen minimal bestimmender Mengen von $S_7^2(\Delta)$ für beliebige Triangulierungen. Wir wählen zunächst, wie in Kapitel 9 beschrieben, für alle Eckpunkte v von Δ eine minimal bestimmende Menge von $S_7^2(\Delta)$ auf $D_3(v)$. Anschließend durchlaufen wir Δ mittels Algorithmus 2 aus Abschnitt 3.1 und wählen basierend auf den Ergebnissen aus Kapitel 8 und 9 weitere BB-Punkte. Wir erhalten somit eine allgemeine Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_7^2(\Delta)$. Ferner setzen wir in Abschnitt 11.2 diese Ergebnisse direkt in allgemeine Hermite-Interpolationsschemas für $S_7^2(\Delta)$ um.

Sei Δ eine beliebige Triangulierung. Wir durchlaufen Δ mittels Algorithmus 2 und erhalten somit auf einer Teilmenge von V eine Indizierung der Eckpunkte v_1, \dots, v_n sowie eine Kette $\Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \dots \subset \Delta_n = \Delta$ von Teiltriangulierungen von Δ . Ist K_ν ein semi-singulärer Fill bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, d. h. sind die Kanten $e_{\nu,0}$ und $e_{\nu,1}$ bzgl. v degeneriert, modifizieren wir $K_\nu = T^{[\nu,1]}$ wie folgt. Im Inneren von $T^{[\nu,1]}$ fügen wir den Schwerpunkt y_ν des Dreiecks hinzu und unterteilen $T^{[\nu,1]}$ somit durch einen Clough-Tocher-Split. Dann sei $K_\nu^* := \{T^{[\nu,(1,\mu)]} : \mu = 1, 2, 3\}$. Ferner sei $\mathcal{N}^* \subset \{1, \dots, n\}$ die Indexmenge aller K_ν , die in Δ^* modifiziert wurden. Die modifizierte Triangulierung Δ^* von Δ definieren wir induktiv durch

$$\begin{aligned} \Delta_0^* &:= \Delta_0, \\ \Delta_\nu^* &:= \begin{cases} \Delta_{\nu-1}^* \cup K_\nu, & \text{falls } \nu \notin \mathcal{N}^*, \\ \Delta_{\nu-1}^* \cup K_\nu^*, & \text{sonst,} \end{cases} \quad \nu = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{11.1}$$

Für $\nu = 0, \dots, n$ bezeichne $V_I^{*(\nu)}$ die Menge der inneren Eckpunkte, $V_B^{*(\nu)}$ die Menge der

Randpunkte und $E_I^{*(\nu)}$ die Menge der inneren Kanten von Δ_ν^* .

Wir betrachten die Zelle Δ_{v_ν} eines Eckpunkts v_ν . Es gelte $n_\nu = \deg(v_\nu)$. Wir nummerieren die Randpunkte der Zelle Δ_{v_ν} gegen den Uhrzeigersinn mit $v_{\nu,0}, \dots, v_{\nu,n_\nu-1}$. Die Kanten von Δ_{v_ν} seien mit $e_{\nu,l} = [v_\nu, v_{\nu,l}]$ und $\tilde{e}_{\nu,l} = [v_{\nu,l-1}, v_{\nu,l}]$ bezeichnet, $l = 1, \dots, n_\nu$. Ferner sei $T^{[\nu,l]} = \Delta(v_\nu, v_{\nu,l-1}, v_{\nu,l})$, $l = 1, \dots, n_\nu$. Die Indizes l sind hierbei sowie im Folgenden stets als l modulo n_ν zu verstehen.

Ist v_ν ein Randpunkt von $\Delta_{\nu-1}$, dann sei K_ν in (11.1) gegeben durch

$$K_\nu = \{T^{[\nu,l]} : l = 1, \dots, \lambda_\nu\}.$$

Ist v_ν ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, dann gelte

$$K_\nu = \begin{cases} \{T^{[\nu,l]} : l = 1, \dots, n_\nu\}, & v_\nu \in V_I, \\ \Delta(v_\nu, v_{\nu,0}, v_{\nu,1}), & v_\nu \in V_B, \end{cases} \quad \text{und} \quad [v_{\nu,0}, v_{\nu,1}] \in E_B^{(\nu-1)}.$$

11.1 Minimal bestimmende Mengen

Gegeben sei eine beliebige Triangulierung Δ und es sei Δ^* wie in (11.1) gegeben. Im Folgenden konstruieren wir eine allgemeine Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_7^2(\Delta^*)$.

Konstruktion minimal bestimmender Mengen:

Für alle $v \in V^*$ wählen wir eine minimal bestimmende Menge \mathcal{A}_v von $S_7^2(\Delta^*)$ auf $D_3(v)$, die wie in (9.23) oder (9.25) gegeben ist, falls $v \in V_I^*$ gilt, und die wie (9.27) gegeben ist, falls $v \in V_B^*$ gilt. Ferner wählen wir für $\nu = 1, \dots, n$ die folgenden BB-Punkte.

Fall 1: Es gilt $v_\nu \in V_B^{*(\nu-1)}$, $\nu \notin \mathcal{N}^*$, und $\lambda_\nu \geq 1$.

Ist v_ν bzgl. $\Delta_{\nu-1}^*$ nicht semisingulär, dann sei $\tilde{l} \in \{1, \dots, \lambda_\nu\}$ so gegeben, dass die Kante $e_{\nu,\tilde{l}}$ bzgl. v_ν nicht degeneriert ist. Die Menge \mathcal{A}_{K_ν} enthalte die folgenden BB-Punkte:

- für $1 \leq l < \tilde{l}$ einen BB-Punkt aus $\{P_{3,3,1}^{[\nu,l]}, P_{3,1,3}^{[\nu,l+1]}, P_{3,2,2}^{[\nu,l+1]}\}$, falls $e_{\nu,l}$ bzgl. v_ν nicht degeneriert ist, und anderenfalls einen BB-Punkt aus $\{P_{3,3,1}^{[\nu,l]}, P_{3,1,3}^{[\nu,l+1]}\}$,
- für $\tilde{l} < l \leq \lambda_\nu$ einen BB-Punkt aus $\{P_{3,2,2}^{[\nu,l]}, P_{3,3,1}^{[\nu,l]}, P_{3,1,3}^{[\nu,l+1]}\}$, falls $e_{\nu,l}$ bzgl. v_ν nicht degeneriert ist, und anderenfalls einen BB-Punkt aus $\{P_{3,3,1}^{[\nu,l]}, P_{3,1,3}^{[\nu,l+1]}\}$,
- für $l = 1, \dots, \lambda_\nu$ einen BB-Punkt aus $\{P_{2,3,2}^{[\nu,l]}, P_{2,2,3}^{[\nu,l+1]}\}$ und
- die BB-Punkte $P_{1,3,3}^{[\nu,l]}$, $l = 1, \dots, \lambda_\nu + 1$.

Fall 2: v_ν ist bzgl. $\Delta_{\nu-1}^*$ semisingulär.

Dann enthalte \mathcal{A}_{K_ν} die folgenden BB-Punkte:

- für $l = 1, \dots, \lambda_\nu$ je einen BB-Punkt aus $\{P_{3,3,1}^{[\nu,l]}, P_{3,1,3}^{[\nu,l+1]}\}$ und $\{P_{2,3,2}^{[\nu,l]}, P_{2,2,3}^{[\nu,l+1]}\}$ sowie
- die BB-Punkte $P_{1,3,3}^{[\nu,l]}$, $l = 1, \dots, \lambda_\nu + 1$.

Ist v_ν nicht singulär, dann definieren wir ferner

$$P_\nu \in \begin{cases} \{P_{3,1,3}^{[\lambda_\nu+2]}, P_{3,3,1}^{[n_\nu]}\}, & \text{falls weder } e_{\nu,0} \text{ noch } e_{\nu,\lambda_\nu+1} \text{ bzgl. } v_\nu \text{ degeneriert ist,} \\ \{P_{3,1,3}^{[\lambda_\nu+2]}\}, & \text{falls } e_{\nu,0} \text{ bzgl. } v_\nu \text{ degeneriert ist,} \\ \{P_{3,3,1}^{[\nu,n_\nu]}\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (11.2)$$

Fall 3: Es gilt $v_\nu \in V_B^{*(n-1)}$, $\nu \notin \mathcal{N}^*$, und $\lambda_\nu = 0$.

Dann setzen wir $\mathcal{A}_{K_\nu} := \{P_{1,3,3}^{[\nu,1]}\}$. Ferner sei P_ν wie in (11.2) definiert.

Fall 4: Es gilt $v_\nu \in V_B^{*(\nu-1)}$, $\nu \in \mathcal{N}^*$.

Dann sei $\mathcal{A}_{K_\nu^*} := \{P_{2,3,2}^{[\nu,(1,1)]}, P_{3,2,2}^{[\nu,(1,3)]}, P_{1,3,3}^{[\nu,(1,3)]}\}$.

Fall 5: v_ν ist ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}^*$.

Gilt $v_\nu \in V_B^*$, dann sei $\mathcal{A}_{K_\nu} := \{P_{3,3,1}^{[\nu,1]}, P_{3,2,2}^{[\nu,1]}, P_{3,1,3}^{[\nu,1]}\}$.

Sei nun $v_\nu \in V_I^*$. Ist v_ν nicht singulär, dann sei $\tilde{l} \in \{1, \dots, n_\nu\}$ so gegeben, dass die Kante $e_{\nu,\tilde{l}}$ bzgl. v_ν nicht degeneriert ist. \mathcal{A}_{K_ν} enthalte die folgenden BB-Punkte:

- einen BB-Punkt aus $\{P_{3,3,1}^{[\nu,l]}, P_{3,1,3}^{[\nu,l+1]}\}$ für $l = 1, \dots, n_\nu$, $l \neq \tilde{l}$, falls v_ν nicht singulär ist bzw. für $l = 1, \dots, 4$, falls v_ν singulär ist.
- für ein $l \in \{1, \dots, n_\nu\}$ den BB-Punkt $P_{3,2,2}^{[\nu,l]}$,
- für $l = 2, \dots, n_\nu - 1$ einen BB-Punkt aus $\{P_{2,3,2}^{[\nu,l]}, P_{2,2,3}^{[\nu,l+1]}\}$ und
- für $l = 1, \dots, n_\nu - 1$ den BB-Punkt $P_{1,3,3}^{[\nu,l]}$.

Für $\nu = 0, \dots, n$ definieren wir die Mengen $\mathcal{A}_\nu \subset \mathcal{B}_7(\Delta_\nu^*)$ induktiv wie folgt. Es sei

$$\mathcal{A}_0 := \{P \in T^{[1,n_1]} : P \notin D_3(v_1) \cup D_3(v_{1,1}) \cup D_3(v_{1,n_1})\}$$

und für $\nu = 1, \dots, n$ gelte

$$\mathcal{A}_\nu := \begin{cases} \mathcal{A}_{\nu-1} \cup \mathcal{A}_{K_\nu^*}, & \text{falls } \nu \in \mathcal{N}^* \text{ gilt,} \\ (\mathcal{A}_{\nu-1} \setminus \{P_\nu\}) \cup \mathcal{A}_{K_\nu} & \text{für } \nu \notin \mathcal{N}^*, \text{ falls } \lambda_\nu = 0 \text{ gilt oder } v_\nu \text{ semi-} \\ & \text{singulär bzgl. } \Delta_{\nu-1}^* \text{ und nicht singulär ist,} \\ \mathcal{A}_{\nu-1} \cup \mathcal{A}_{K_\nu}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (11.3)$$

Dann definieren wir

$$\mathcal{A} := \cup_{v \in V^*} \mathcal{A}_v \cup \mathcal{A}_n. \quad (11.4)$$

Theorem 11.1. *Sei $\Delta^* = \Delta_n^*$ wie in (11.1) gegeben. Dann ist \mathcal{A} wie in (11.4) eine minimal bestimmende Menge von $S_7^2(\Delta^*)$.*

Beweis. Sei $s \in S_7^2(\Delta^*)$. Ist s in der BB-Darstellung (2.5) gegeben, bezeichne $a_{i,j,k}^{[\nu,l]}$, $i+j+k=7$, die Bézier-Koeffizienten von $s|_{T^{[\nu,l]}}$, $\nu = 1, \dots, n$, $\nu \notin \mathcal{N}^*$, $l = 1, \dots, n_\nu$. Ferner seien $a_{i,j,k}^{[\nu,(1,\mu)]}$, $i+j+k=7$, die Bézier-Koeffizienten von $s|_{T^{[\nu,(1,\mu)]}}$, $\mu = 1, 2, 3$, $\nu \in \mathcal{N}^*$. Wir zeigen zunächst, dass \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_7^2(\Delta^*)$ ist. Es gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}$. Dann ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_7(\Delta^*)$ gilt. Nach Konstruktion von \mathcal{A} erhalten wir direkt

$$\lambda_P s = 0, \quad P \in \cup_{v \in V^*} D_3(v). \quad (11.5)$$

Wir zeigen im Folgenden, dass

$$\lambda_P s = 0, \quad P \in \mathcal{A}_\nu \quad \Rightarrow \quad \lambda_P s = 0, \quad P \in \mathcal{B}_7(\Delta_\nu^*), \quad \nu = 0, \dots, n, \quad (11.6)$$

gilt.

Beweis von (11.6) durch vollständige Induktion nach ν .

Induktionsanfang $\nu = 0$. Die Behauptung (11.6) folgt direkt aus (11.5) und nach Definition von \mathcal{A}_0 .

Induktionsschritt $\nu-1 \rightarrow \nu$. Die Behauptung (11.6) sei für $\nu-1$ bereits bewiesen.

Fall 1: Es gilt $v_\nu \in V_B^{*(\nu-1)}$, $\nu \notin \mathcal{N}^*$, und entweder ist v_ν singulär oder v_ν ist bzgl. $\Delta_{\nu-1}^*$ nicht semisingulär. Nach Induktionsannahme folgt direkt $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_7(\Delta_{\nu-1}^*)$. Aus (11.5) und den C^2 -Stetigkeitsbedingungen an den Kanten $e_{\nu,0}$ und $e_{\nu,\lambda_\nu+1}$ erhalten wir ferner $a_{3,1,3}^{[\nu,1]} = a_{3,2,2}^{[\nu,1]} = a_{2,2,3}^{[\nu,1]} = 0$ und $a_{3,3,1}^{[\nu,\lambda_\nu+1]} = a_{2,3,2}^{[\nu,\lambda_\nu+1]} = a_{3,2,2}^{[\nu,\lambda_\nu+1]} = 0$. Dann folgt mit (11.5) und nach Definition von \mathcal{A}_{K_ν} aus Theorem 8.23 die Behauptung.

Fall 2: Es gilt $\nu \notin \mathcal{N}^*$, und entweder ist $v_\nu \in V_B^{*(\nu-1)}$ ein nicht singulärer Eckpunkt, der bzgl. $\Delta_{\nu-1}^*$ semisingulär ist, oder es gilt $\lambda_\nu = 0$. Nach Konstruktion gilt $\mathcal{A}_\nu = (\mathcal{A}_{\nu-1} \setminus \{P_\nu\}) \cup \mathcal{A}_{K_\nu}$. Da P_ν in keiner C^2 -Menge bzgl. einer inneren Kante von $\Delta_{\nu-1}^*$ liegt, folgt nach Induktionsannahme $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_7(\Delta_{\nu-1}^*) \setminus \{P_\nu\}$. O.B.d.A. sei $e_{\nu,0}$ bzgl. v_ν nicht degeneriert, und es gelte $P_\nu = P_{3,3,1}^{[\nu,n_\nu]}$. Dann folgt mit (11.5) aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen an der Kante $e_{\nu,\lambda_\nu+1}$, dass $a_{3,3,1}^{[\nu,\lambda_\nu+1]} = a_{2,3,2}^{[\nu,\lambda_\nu+1]} = a_{3,2,2}^{[\nu,\lambda_\nu+1]} = 0$ gilt. Ist $\lambda_\nu \geq 1$, folgt ferner aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen auf den C^2 -Mengen $C_{(\nu,l),4}^2(v_\nu)$, dass $a_{3,2,2}^{[\nu,l]} = 0$, $1 \leq l \leq \lambda_\nu$, gilt. Insbesondere gilt somit in allen Fällen $\lambda_P s = 0$, $P \in C_{(\nu,0),3}^1(v_\nu)$, und $a_{3,2,2}^{[\nu,1]} = a_{3,4,0}^{[\nu,1]} = a_{3,2,2}^{[\nu,n_\nu]} = 0$. Da $e_{\nu,0}$ bzgl. v_ν nicht degeneriert ist,

folgt aus Lemma 8.5 $a_{3,1,3}^{[\nu,1]} = a_{3,3,1}^{[\nu,n_\nu]} = 0$. Aus der C^2 -Stetigkeitsbedingung auf $C_{(\nu,0),5}^2(v)$ erhalten wir ferner $a_{2,2,3}^{[\nu,1]} = 0$. Nach Definition von \mathcal{A}_{K_ν} folgt dann die Behauptung. Gilt $P_\nu = P_{3,1,3}^{[\nu,\lambda_\nu+2]}$, folgt die Behauptung analog.

Fall 3: Es gilt $\nu \in \mathbb{N}^*$. Analog zum Beweis von Fall 1 folgt, dass $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_7(\Delta_{\nu-1}^*)$, und $a_{3,1,3}^{[\nu,(1,1)]} = a_{3,2,2}^{[\nu,(1,1)]} = a_{2,2,3}^{[\nu,(1,1)]} = a_{3,3,1}^{[\nu,(1,2)]} = a_{2,3,2}^{[\nu,(1,2)]} = a_{3,2,2}^{[\nu,(1,2)]} = 0$ gilt. Mit (11.5) und nach Konstruktion von $\mathcal{A}_{K_\nu^*}$ folgt dann bereits aus Theorem 8.24 die Behauptung.

Fall 4: v_ν ist ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}^*$. Nach Induktionsannahme folgt mit (11.5) aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen an der Kante $\tilde{e}_{\nu,1}$, dass $a_{1,3,3}^{[\nu,1]} = a_{2,2,3}^{[\nu,1]} = a_{2,3,2}^{[\nu,1]} = 0$ gilt. Gilt $v_\nu \in V_B^*$, folgt nach Definition von \mathcal{A}_{K_ν} bereits die Behauptung. Gilt $v_\nu \in V_I^*$, folgt aus Lemma 9.3 mit (11.5) $\lambda_P s = 0$, $P \in D_4(v)$. Insbesondere gilt dann $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_7(T^{[\nu,1]})$. Analog zum Beweis von Fall 1 folgt dann die Behauptung. \square

Es bleibt zu zeigen, dass \mathcal{A} minimal ist. Wir zeigen zunächst, dass

$$|\mathcal{A}_\nu| = 6 + 3|E_I^{*(\nu)}| - 6|V_I^{*(\nu)}| + \sum_{v \in V_I^{*(\nu)}} \sigma_v^*, \quad \nu = 0, \dots, n, \quad (11.7)$$

gilt, wobei für σ_v^* wie folgt definiert ist.

$$\sigma_v^* := \begin{cases} 1, & \text{falls } v \text{ singulär ist,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad v \in V_I^*.$$

Beweis von (11.7) durch Induktion nach ν .

Induktionsanfang $\nu = 0$. Nach Konstruktion gilt $|\mathcal{A}_0| = 6$. Wegen $|E_I^{*(0)}| = |V_I^{*(0)}| = 0$ folgt dann (11.7).

Induktionsschritt $\nu - 1 \rightarrow \nu$. Die Behauptung (11.7) sei für $\nu - 1$ bereits bewiesen.

Fall 1: Es sei $v_\nu \in V_B^{*(\nu-1)}$ ein nicht singulärer Eckpunkt und ferner gelte $\lambda_\nu \geq 0$, $\nu \notin \mathbb{N}^*$. Nach Konstruktion gilt dann $|\mathcal{A}_\nu| = |\mathcal{A}_{\nu-1}| + 3\lambda_\nu$. Da in diesem Fall $|E_I^{*(\nu)}| = |E_I^{*(\nu-1)}| + \lambda_\nu + 2$ sowie $|V_I^{*(\nu)}| = |V_I^{*(\nu-1)}| + 1$ gilt, folgt nach Induktionsannahme (11.7).

Fall 2: Es sei $v_\nu \in V_B^{*(\nu-1)}$ ein singulärer Eckpunkt und es gelte $\lambda_\nu = 1$. Nach Konstruktion gilt $|\mathcal{A}_\nu| = |\mathcal{A}_{\nu-1}| + 4$. Ferner ist $|E_I^{*(\nu)}| = |E_I^{*(\nu-1)}| + 3$ und $|V_I^{*(\nu)}| = |V_I^{*(\nu-1)}| + 1$, so dass nach Induktionsannahme (11.7) folgt.

Fall 3: Es sei $v_\nu \in V_B^{*(\nu-1)}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Dann gilt nach Konstruktion $|\mathcal{A}_\nu| = |\mathcal{A}_{\nu-1}| + 3$. Da ferner $|E_I^{*(\nu)}| = |E_I^{*(\nu-1)}| + 5$ und $|V_I^{*(\nu)}| = |V_I^{*(\nu-1)}| + 2$ gilt, folgt nach Induktionsannahme (11.7).

Fall 4: Es sei $v_\nu \in V_B^*$ ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}^*$. Dann gilt $|\mathcal{A}_\nu| = |\mathcal{A}_{\nu-1}| + 3$. Ferner ist $|E_I^{*(\nu)}| = |E_I^{*(\nu-1)}| + 1$ und $|V_I^{*(\nu)}| = |V_I^{*(\nu-1)}|$, so dass nach Induktionsannahme (11.7) folgt.

Fall 5: Es sei $v_\nu \in V_I^*$ ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}^*$. Dann gilt $|\mathcal{A}_\nu| = |\mathcal{A}_{\nu-1}| + 3n_\nu - 1 + \sigma_{v_\nu}^*$. Da nach Konstruktion $|E_I^{*(\nu)}| = |E_I^{*(\nu-1)}| + n_\nu + 1$ und $|V_I^{*(\nu)}| = |V_I^{*(\nu-1)}| + 1$ gilt, folgt dann nach Induktionsannahme bereits (11.7). \square

Mit (11.7) gilt somit $|\mathcal{A}_n| = 6 + 3|E_I^*| - 6|V_I^*| + \sum_{v \in V_I^*} \sigma_v^*$. Für $v \in V_I^*$ definieren wir

$$\tilde{\sigma}_v := \begin{cases} 2, & \text{falls } v \text{ singulär ist,} \\ 1, & \text{falls } v \text{ nicht singulär ist und } e_v < 4 \text{ gilt,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt offensichtlich für alle $v \in V_I^*$ $\sigma_v = \tilde{\sigma}_v + \sigma_v^*$. Für $v \in V_I^*$ gilt $|\mathcal{A}_v| = n_v + 6 + \tilde{\sigma}_v$, und für $v \in V_B^*$ gilt $|\mathcal{A}_v| = n_v + 8$. Mit den Euler-Formeln (2.1) und (2.2) folgt dann

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| &= \sum_{v \in V^*} |\mathcal{A}_v| + \mathcal{A}_n \\ &= \sum_{v \in V_I^*} (n_v + 6 + \tilde{\sigma}_v) + \sum_{v \in V_B^*} (n_v + 8) + 6 + 3|E_I^*| - 6|V_I^*| + \sum_{v \in V_I^*} \sigma_v^* \\ &= 2|E^*| + 6|V_I^*| + 8|V_B^*| + \sum_{v \in V_I^*} \tilde{\sigma}_v + 6 + 3|E_I^*| - 6|V_I^*| + \sum_{v \in V_I^*} \sigma_v^* \\ &= 6 + 5|E_I^*| + 10|V_B^*| + \sum_{v \in V_I^*} \sigma_v \\ &= 36 + 15|E_I^*| - 30|V_I^*| + \sum_{v \in V_I^*} \sigma_v \end{aligned}$$

Aus den Theoremen 2.3 und 2.4 folgt somit die Behauptung. \blacksquare

11.2 Hermite-Interpolation

Für eine gegebene Triangulierung Δ sei Δ^* wie in (11.1) definiert. Wir geben im Folgenden eine Klasse von Hermite-Interpolationsschemas für $S_7^2(\Delta^*)$ an. Analog zu der Konstruktion minimal bestimmender Mengen von $S_7^2(\Delta^*)$ in Abschnitt 11.1 gehen wir dabei wie folgt vor. Für jeden Eckpunkt v von Δ^* geben wir zunächst Interpolationsbedingungen an, die alle partiellen Ableitungen dritten Grades von s in v eindeutig bestimmen. Anschließend durchlaufen wir die Triangulierung Δ^* in der in (11.1) festgelegten Reihenfolge. In jedem Schritt bestimmen wir dabei induktiv weitere Hermite-Interpolationsbedingungen.

Es sei $\mathcal{E}^* \subset E^*$ wie folgt definiert:

- Ist v_ν ein nicht singulärer Eckpunkt, der bzgl. $\Delta_{\nu-1}^*$ semisingulär ist, dann gelte $e_{\nu,0} \in \mathcal{E}^*$, falls $e_{\nu,0}$ bzgl. v_ν nicht degeneriert ist, anderenfalls gelte $e_{\nu,\lambda_{\nu+1}} \in \mathcal{E}^*$, $\nu = 1, \dots, n$, $\nu \notin \mathcal{N}^*$.

- Für alle $\nu \in \mathcal{N}^*$ gelte $e_{\nu,0} \in \mathcal{E}^*$.

Sei $s \in S_7^2(\Delta^*)$ gegeben.

Konstruktion von Hermite-Interpolationsmengen:

Wir beschreiben zunächst die Hermite-Interpolationsbedingungen, die s für jeden Eckpunkt $v \in V^*$ erfüllen muss. Sei $n_v = \deg(v)$. Gilt $v \in V_I^*$, dann seien die Eckpunkte und Dreiecke von Δ_v wie in Abbildung 4.6 nummeriert, und es gelte $e_l = [v, v_l]$, $l = 0, \dots, n_v - 1$. Für $v \in V_B^*$ nummerieren wir die Eckpunkte von Δ_v gegen den Uhrzeigersinn mit v_0, \dots, v_{n_v-1} . Für $l = 0, \dots, n_v - 1$ sei $e_l = [v, v_l]$ und für $l = 1, \dots, n_v - 1$ sei ferner $T^{[l]} = \Delta(v, v_{l-1}, v_l)$. Des Weiteren sei in beiden Fällen $p^{[l]} = s|_{T^{[l]}}$, $l = 1, \dots, n_v$ bzw. $l = 1, \dots, n_v - 1$. Sei $f \in C(\Omega)$ genügend oft differenzierbar. Ferner seien $D^\omega p^{[l]}$ und $D^\omega f$ wie in (2.3) definiert.

Fall 1: $v \in V_I^*$ ist nicht singulär.

Gilt $e_v \geq 4$, dann nummerieren wir die inneren Kanten von Δ_v so, dass die Kanten $e_1, e_0, e_{n_v-1}, e_{n_v-2}$ paarweise nicht kollinear sind. Ferner sei $\tilde{l} \in \{1, \dots, n_v - 2\}$. Gilt $e_v < 4$, dann seien die inneren Kanten von Δ_v so nummeriert, dass die Kante e_0 bzgl. v nicht degeneriert ist, und es gelte $\tilde{l} \in \{1, \dots, n_v - 1\}$. s erfülle die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

- $D^\omega p^{[l]}(v) = D^\omega f(v)$, $\omega = 0, 1, 2$ für ein $l \in \{1, \dots, n_v\}$,
- $\frac{\partial^3 p^{[l]}}{\partial^{3-\sigma} e_{\tilde{l}} \partial^\sigma e_{\tilde{l}-1}}(v) = \frac{\partial^3 f}{\partial^{3-\sigma} e_{\tilde{l}} \partial^\sigma e_{\tilde{l}-1}}(v)$, $\sigma = 0, 1, 2$, und
- $\frac{\partial^3 p^{[l]}}{\partial^3 e_l}(v) = \frac{\partial^3 f}{\partial^3 e_l}(v)$ für $l = 1, \dots, n_v - 2$, $l \neq \tilde{l}$, falls $e_v \geq 4$ gilt, und für $l = 1, \dots, n_v - 1$, $l \neq \tilde{l}$, falls $e_v < 4$ gilt.

Fall 2: $v \in V_I$ ist singulär.

Dann erfülle s die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

- $D^\omega p^{[l]}(v) = D^\omega f(v)$, $\omega = 0, 1, 2$ für ein $l \in \{1, \dots, 4\}$,
- $\frac{\partial^3 p^{[l]}}{\partial^3 e_l}(v) = \frac{\partial^3 f}{\partial^3 e_l}(v)$, $l = 1, \dots, 4$, und
- jeweils $\frac{\partial^3 p^{[l]}}{\partial^2 e_l \partial e_{l-1}}(v) = \frac{\partial^3 f}{\partial^2 e_l \partial e_{l-1}}(v)$ für ein $l \in \{1, 3\}$ und ein $l \in \{2, 4\}$.

Fall 3: Es gilt $v \in V_B$.

Dann erfülle s für ein $\tilde{l} \in \{1, \dots, n_v - 1\}$ die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

- $D^\omega p^{[\tilde{l}]}(v) = D^\omega f(v)$, $\omega = 0, 1, 2, 3$, und

- $\frac{\partial^3 p^{[l]}}{\partial^3 e_l}(v) = \frac{\partial^3 f}{\partial^3 e_l}(v), \quad l = 0, \dots, n_v - 1, l \neq \tilde{l} - 1, \tilde{l}.$

Für $\nu = 0, \dots, n$ erfülle s ferner die folgenden Bedingungen. Es seien $D^\omega f, D^\omega p^{[\nu, l]}$, falls $\nu \notin \mathcal{N}^*$ gilt, und analog dazu $D^\omega p^{[\nu, (1, \mu)]}$, falls $\nu \in \mathcal{N}^*$ gilt, wie in (2.3) definiert.

Fall 1: Es gilt $\nu = 0$.

s erfülle die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

- $\frac{\partial^4 p^{[1, 1]}}{\partial^{4-\sigma} e_{1,1} \partial^\sigma e_{1,0}}(v_1) = \frac{\partial^4 f}{\partial^{4-\sigma} e_{1,1} \partial^\sigma e_{1,0}}(v_1), \quad \sigma = 1, 2, 3,$
- $\frac{\partial^4 p^{[1, 1]}}{\partial^2 \tilde{e}_{1,1} \partial^2 e_{1,1}}(v_{1,1}) = \frac{\partial^4 f}{\partial^2 \tilde{e}_{1,1} \partial^2 e_{1,1}}(v_{1,1})$ und im Fall $\tilde{e}_{1,1} \notin \mathcal{E}^*$ $\frac{\partial^4 p^{[1, 1]}}{\partial^3 \tilde{e}_{1,1} \partial e_{1,1}}(v_{1,1}) = \frac{\partial^4 f}{\partial^3 \tilde{e}_{1,1} \partial e_{1,1}}(v_{1,1})$, und
- $\frac{\partial^4 p^{[1, 1]}}{\partial^2 e_{1,0} \partial^2 \tilde{e}_{1,1}}(v_{1,0}) = \frac{\partial^4 f}{\partial^2 e_{1,0} \partial^2 \tilde{e}_{1,1}}(v_{1,0}).$

Fall 2: Es gilt $v_\nu \in V_B^{*(\nu-1)}, \nu \geq 1$.

a) Es gilt $\lambda_\nu \geq 1$.

Ist v_ν bzgl. $\Delta_{\nu-1}^*$ nicht semisingulär, dann sei $\tilde{l} \in \{1, \dots, \lambda_\nu\}$ so gegeben, dass die Kante $e_{\nu, \tilde{l}}$ bzgl. v_ν nicht degeneriert ist. s erfülle die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

- $\frac{\partial^4 p^{[\nu, l]}}{\partial^3 e_{\nu, l} \partial e_{\nu, l-1}}(v_\nu) = \frac{\partial^4 f}{\partial^3 e_{\nu, l} \partial e_{\nu, l-1}}(v_\nu)$ oder $\frac{\partial^4 p^{[\nu, l+1]}}{\partial^3 e_{\nu, l} \partial e_{\nu, l+1}}(v_\nu) = \frac{\partial^4 f}{\partial^3 e_{\nu, l} \partial e_{\nu, l+1}}(v_\nu)$
für $l = 1, \dots, \lambda, l \neq \tilde{l}$, falls v_ν bzgl. $\Delta_{\nu-1}^*$ nicht semisingulär ist, und anderenfalls
für $l = 1, \dots, \lambda_\nu$,
- $\frac{\partial^4 p^{[\nu, l]}}{\partial^2 e_{\nu, l} \partial^2 \tilde{e}_{\nu, l}}(v_{\nu, l}) = \frac{\partial^4 f}{\partial^2 e_{\nu, l} \partial^2 \tilde{e}_{\nu, l}}(v_{\nu, l})$ oder $\frac{\partial^4 p^{[\nu, l+1]}}{\partial^2 e_{\nu, l} \partial^2 \tilde{e}_{\nu, l+1}}(v_{\nu, l}) = \frac{\partial^4 f}{\partial^2 e_{\nu, l} \partial^2 \tilde{e}_{\nu, l+1}}(v_{\nu, l})$
für $l = 1, \dots, \lambda_\nu$ und
- $\frac{\partial^4 p^{[\nu, l]}}{\partial^3 \tilde{e}_{\nu, l} \partial e_{\nu, l}}(v_{\nu, l}) = \frac{\partial^4 f}{\partial^3 \tilde{e}_{\nu, l} \partial e_{\nu, l}}(v_{\nu, l})$, falls $\tilde{e}_{\nu, l} \notin \mathcal{E}^*$ gilt, $l = 1, \dots, \lambda_\nu + 1$.

b) Es gilt $\lambda_\nu = 0$ und $\nu \notin \mathcal{N}^*$.

Dann erfülle s die folgende Interpolationsbedingung:

- $\frac{\partial^4 p^{[\nu, 1]}}{\partial^3 \tilde{e}_{\nu, 1} \partial e_{\nu, 1}}(v_{\nu, 1}) = \frac{\partial^4 f}{\partial^3 \tilde{e}_{\nu, 1} \partial e_{\nu, 1}}(v_{\nu, 1})$, falls $\tilde{e}_{\nu, 1} \notin \mathcal{E}^*$ gilt.

c) Es gilt $\lambda_\nu = 0$ und $\nu \in \mathcal{N}^*$.

Dann erfülle s die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

- $\frac{\partial^4 p^{[\nu, (1,1)]}}{\partial^2 e_{\nu, (1,1)} \partial^2 e_{\nu, (1,3)}} (y_{\nu,1}) = \frac{\partial^4 f}{\partial^2 e_{\nu, (1,1)} \partial^2 e_{\nu, (1,3)}} (y_{\nu,1})$ und $\frac{\partial^4 p^{[\nu, (1,3)]}}{\partial^2 e_{\nu, (1,2)} \partial^2 e_{\nu, (1,3)}} (y_{\nu,1}) = \frac{\partial^4 f}{\partial^2 e_{\nu, (1,2)} \partial^2 e_{\nu, (1,3)}} (y_{\nu,1})$ sowie
- $\frac{\partial^4 p^{[\nu, (1,3)]}}{\partial^3 \tilde{e}_{\nu,1} \partial e_{\nu, (1,2)}} (v_{\nu,1}) = \frac{\partial^4 f}{\partial^3 \tilde{e}_{\nu,1} \partial e_{\nu, (1,2)}} (v_{\nu,1})$, falls $\tilde{e}_{\nu,1} \notin \mathcal{E}^*$ gilt.

Fall 3: Es gilt $v_\nu \notin V_B^{*(\nu-1)}$, $\nu \geq 1$.

a) Es gilt $v_\nu \in V_B^*$.

Dann erfülle s die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

- $\frac{\partial^4 p^{[\nu,1]}}{\partial^{4-\sigma} e_{\nu,1} \partial^\sigma e_{\nu,0}} (v_\nu) = \frac{\partial^4 f}{\partial^{4-\sigma} e_{\nu,1} \partial^\sigma e_{\nu,0}} (v_\nu)$, $\sigma = 1, 2, 3$.

b) Es gilt $v_\nu \in V_I^*$.

Ist v_ν nicht singulär, dann sei $\tilde{l} \in \{1, \dots, n_\nu\}$ so gegeben, dass die Kante $e_{\nu, \tilde{l}}$ bzgl. v_ν nicht degeneriert ist. Dann erfülle s die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

- $\frac{\partial^4 p^{[\nu, l]}}{\partial^3 e_{\nu, l} \partial e_{\nu, l-1}} (v_\nu) = \frac{\partial^4 f}{\partial^3 e_{\nu, l} \partial e_{\nu, l-1}} (v_\nu)$ oder $\frac{\partial^4 p^{[\nu, l+1]}}{\partial^3 e_{\nu, l} \partial e_{\nu, l+1}} (v_\nu) = \frac{\partial^4 f}{\partial^3 e_{\nu, l} \partial e_{\nu, l+1}} (v_\nu)$
für $l = 1, \dots, n_\nu$, $l \neq \tilde{l}$, falls v_ν nicht singulär ist, bzw. anderenfalls für $l = 1, \dots, 4$,
- $\frac{\partial^4 p^{[\nu, l]}}{\partial^2 e_{\nu, l} \partial^2 e_{\nu, l-1}} (v_\nu) = \frac{\partial^4 f}{\partial^2 e_{\nu, l} \partial^2 e_{\nu, l-1}} (v_\nu)$ für ein $l \in \{1, \dots, n_\nu\}$,
- $\frac{\partial^4 p^{[\nu, l]}}{\partial^2 e_{\nu, l} \partial^2 \tilde{e}_{\nu, l}} (v_{\nu, l}) = \frac{\partial^4 f}{\partial^2 e_{\nu, l} \partial^2 \tilde{e}_{\nu, l}} (v_{\nu, l})$ oder $\frac{\partial^4 p^{[\nu, l+1]}}{\partial^2 e_{\nu, l} \partial^2 \tilde{e}_{\nu, l+1}} (v_{\nu, l}) = \frac{\partial^4 f}{\partial^2 e_{\nu, l} \partial^2 \tilde{e}_{\nu, l+1}} (v_{\nu, l})$
für $l = 2, \dots, n_\nu - 1$ und
- $\frac{\partial^4 p^{[\nu, l]}}{\partial^3 \tilde{e}_{\nu, l} \partial e_{\nu, l}} (v_{\nu, l}) = \frac{\partial^4 f}{\partial^3 \tilde{e}_{\nu, l} \partial e_{\nu, l}} (v_{\nu, l})$, falls $\tilde{e}_{\nu, l} \notin \mathcal{E}^*$, $l = 2, \dots, n_\nu$, gilt.

Theorem 11.2. Sei Δ^* wie in (11.1) gegeben. Dann ist V^* eine Hermite-Interpolationsmenge von $S_7^2(\Delta^*)$.

Beweis. Mit den Beziehungen (2.7) zwischen den partiellen Ableitungen und den Bézier-Koeffizienten von s erhalten wir zunächst für alle $v \in V^*$, dass die Hermite-Interpolationsbedingungen die Bézier-Koeffizienten einer Menge $\mathcal{A}_v \in \mathcal{M}_3^2(v)$ eindeutig bestimmen, wobei $\mathcal{M}_3^2(v)$ wie in Abschnitt 9.1 definiert ist, falls $v \in V_I^*$ gilt, bzw. wie in Abschnitt 9.2 definiert ist, falls $v \in V_B^*$ gilt. Somit folgt, dass s für alle $v \in V^*$ auf $D_3(v)$ eindeutig bestimmt ist. Mit den Beziehungen (2.7) erhalten wir ferner, dass die Hermite-Interpolationsbedingungen die Bézier-Koeffizienten einer Menge \mathcal{A}_n , die wie in (11.3) gegeben ist, eindeutig bestimmen. Aus Theorem 11.1 folgt dann die Behauptung. ■

Kapitel 12

Der Splineraum $S_q^2(\Delta)$, $q \geq 8$

In diesem Kapitel betrachten wir den Splineraum $S_q^2(\Delta)$, $q \geq 8$, für beliebige Triangulierungen. In Abschnitt 12.1 konstruieren wir eine allgemeine Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta)$, $q \geq 8$. Dabei gehen wir analog zu der Methode für den Fall $q = 7$ aus Kapitel 11 vor. Im Gegensatz zum Fall $q = 7$ muss im Fall $q \geq 8$ die Triangulierung für semisinguläre Fills nicht modifiziert werden. Mit der Charakterisierung allgemeiner minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta)$ auf beliebigen Kegeln und Zellen aus Kapitel 8 bzw. Kapitel 9 ergibt sich somit für $q \geq 8$ direkt eine große Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta)$ für beliebige Triangulierungen. In Abschnitt 12.2 konstruieren wir unter Verwendung der Relationen zwischen den Bézier-Koeffizienten eines Splines und dessen Ableitungen erstmalig ein Hermite-Interpolationsschema für $S_q^2(\Delta)$, $q \geq 8$, für beliebige Triangulierungen. Chui & Lai [14] und Lai & Schumaker [37] konstruierten eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta)$, $q \geq 8$. Ferner gaben Davydov, Nürnberger & Zeilfelder [21] ein Hermite-Birkhoff-Interpolationsschema für $S_q^2(\Delta)$, $q \geq 8$, an.

Sei Δ eine beliebige Triangulierung. Wir durchlaufen Δ nach Algorithmus 2 aus Abschnitt 3.1. Dies liefert uns eine Indizierung $\nu = 1, \dots, n$ der Eckpunkte v_ν aus $V_I \cup \tilde{V}_B$, wobei \tilde{V}_B die Menge der Randpunkte von Δ bezeichnet, die nur mit Randpunkten von Δ eine gemeinsame Kante besitzen. Ferner liefert uns Algorithmus 2 eine Kette $\Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \dots \subset \Delta_n = \Delta$, $n = |\tilde{V}_B| + |V_I|$, von Teiltriangulierungen von Δ . Nach Konstruktion gilt

$$\Delta_1 := \Delta_{v_1} \quad \text{und} \quad \Delta_\nu := \Delta_{\nu-1} \cup K_\nu, \quad \nu = 2, \dots, n, \quad (12.1)$$

mit

$$K_\nu := \begin{cases} \cup_{T \in \Delta_{v_\nu} \setminus \Delta_{\nu-1}} T, & \text{falls } v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}, \\ \cup_{T \in \Delta_{v_\nu}} T, & \text{falls } v_\nu \notin V_B^{(\nu-1)} \text{ und } v_\nu \in V_I, \\ \Delta(v_\nu, w, w'), & \text{falls } v_\nu \notin V_B^{(\nu-1)} \text{ und } v_\nu \in V_B, \end{cases}$$

wobei für $v_\nu \in V_B \setminus V_B^{(\nu-1)}$ die Eckpunkte w, w' benachbarte Randpunkte von $\Delta_{\nu-1}$ seien und ferner $\Delta(v_\nu, w, w') \in \Delta_{v_\nu}$ gelte. Für $\nu = 1, \dots, n$ bezeichne $V_I^{(\nu)}$ die Menge der inneren Eckpunkte, $V_B^{(\nu)}$ die Menge der Randpunkte, $E_I^{(\nu)}$ die Menge der inneren Kanten und $E_B^{(\nu)}$ die Menge der Randkanten von Δ_ν .

Wir betrachten die Zelle Δ_{v_ν} eines Eckpunkts v_ν . Es sei $n_\nu = \deg(v_\nu)$. Wir nummerieren die Randpunkte der Zelle Δ_{v_ν} gegen den Uhrzeigersinn mit $v_{\nu,0}, \dots, v_{\nu,n_\nu-1}$. Die Kanten von Δ_{v_ν} seien mit $e_{\nu,l} = [v_\nu, v_{\nu,l}]$ und $\tilde{e}_{\nu,l} = [v_{\nu,l-1}, v_{\nu,l}]$, $l = 1, \dots, n_\nu$, bezeichnet. Ferner sei $T^{[\nu,l]} := \Delta(v_\nu, v_{\nu,l-1}, v_{\nu,l})$, $l = 1, \dots, n_\nu$. Die Indizes l sind hierbei sowie im Folgenden stets als l modulo n_ν zu verstehen. Ist $v_\nu \in V_I \cap V_B^{(\nu)}$, dann gelte

$$K_\nu = \{T^{[\nu,l]} : l = 1, \dots, \lambda_\nu\}. \quad (12.2)$$

Ist v_ν ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, dann gelte

$$K_\nu = \begin{cases} \{T^{[\nu,l]} : l = 1, \dots, n_\nu\}, & v_\nu \in V_I, \\ \Delta(v_\nu, v_{\nu,0}, v_{\nu,1}), & v_\nu \in V_B, \end{cases} \quad \text{und} \quad [v_{\nu,0}, v_{\nu,1}] \in E_B^{(\nu-1)}. \quad (12.3)$$

Für die Eckpunkte von Δ gelten insbesondere die Bemerkungen 7.1 bis 7.3.

12.1 Minimal bestimmende Mengen

Sei Δ eine beliebige Triangulierung. Ferner seien die Teiltriangulierungen Δ_ν , $\nu = 0, \dots, n$, die wir mittels Algorithmus 2 erhalten, wie in (12.1) gegeben. Im Folgenden konstruieren wir eine allgemeine Klasse minimal bestimmender Mengen von $S_q^2(\Delta)$, $q \geq 8$. Dazu bestimmen wir $S_q^2(\Delta)$ zunächst auf den Scheiben $D_3(v)$ für jeden Eckpunkt v der Triangulierung. Anschließend betrachten wir für $\nu \geq 1$ die Dreiecke in $\Delta_\nu \setminus \Delta_{\nu-1}$ und fügen sukzessive weitere BB-Punkte zu den bereits gewählten BB-Punkten in $\Delta_{\nu-1}$ hinzu.

Für $\nu \geq 1$ definieren wir $\mathcal{P}_\nu \subset \mathcal{B}_q(K_\nu)$ wie folgt.

- Es gelte $\nu = 1$.
Ist $v_{1,l}$, $1 \leq l \leq n_1 - 1$, ein nicht singulärer Eckpunkt, der entweder ein Fillpunkt oder semisingulär bzgl. Δ_1 ist, gelte entweder $P_{1,q-4,3}^{[1,l]} \in \mathcal{P}_1$ oder $P_{1,3,q-4}^{[1,l+1]} \in \mathcal{P}_1$.
- Sei $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$, $\nu > 1$.
 - Ist $v_{\nu,0}$ ein nicht singulärer Eckpunkt, der entweder ein Fillpunkt oder semisingulär bzgl. Δ_ν ist, und ist ferner $\tilde{e}_{\nu,1}$ bzgl. $v_{\nu,0}$ nicht degeneriert, gelte $P_{1,3,q-4}^{[\nu,1]} \in \mathcal{P}_\nu$.
 - Ist $v_{\nu,l}$, $1 \leq l \leq \lambda_\nu$, ein nicht singulärer Eckpunkt, der entweder ein Fillpunkt oder semisingulär bzgl. Δ_ν ist, gelte entweder $P_{1,q-4,3}^{[\nu,l]} \in \mathcal{P}_\nu$ oder $P_{1,3,q-4}^{[\nu,l+1]} \in \mathcal{P}_\nu$.

- Ist $v_{\nu, \lambda_\nu + 1}$ ein nicht singulärer Eckpunkt, der entweder ein Fillpunkt oder semisingulär bzgl. Δ_ν ist, und ist ferner $\tilde{e}_{\nu, \lambda_\nu + 1}$ bzgl. $v_{\nu, \lambda_\nu + 1}$ nicht degeneriert, gelte $P_{1, q-4, 3}^{[\nu, \lambda_\nu + 1]} \in \mathcal{P}_\nu$.
- Sei $v_\nu \in V_I$ ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, $\nu > 1$.
Ist $v_{\nu, l}$, $2 \leq l \leq n_\nu - 1$, ein nicht singulärer Eckpunkt, der entweder ein Fillpunkt oder semisingulär bzgl. Δ_ν ist, gelte entweder $P_{1, q-4, 3}^{[\nu, l]} \in \mathcal{P}_\nu$ oder $P_{1, 3, q-4}^{[\nu, l+1]} \in \mathcal{P}_\nu$.

Konstruktion minimal bestimmender Mengen:

Fall 1: Für $\nu \geq 2$ gilt $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ und $\lambda_\nu \geq 1$.

Dann sei die Menge \mathcal{A}_{K_ν} definiert durch

$$\mathcal{A}_{K_\nu} := \left(\bigcup_{l=0}^{\lambda_\nu} \mathcal{A}_{\nu, l} \cup \mathcal{M} \right) \setminus \left(\bigcup_{l=0}^{\lambda_\nu} \mathcal{B}_{\nu, l} \cup \mathcal{P}_\nu \right),$$

wobei $\mathcal{M} := \{P_{i, j, k}^{[\nu, l]} : j, k \geq 3, (i, j, k) \neq (0, q-3, 3), (0, 3, q-3), l = 1, \dots, \lambda+1\}$ gilt und die Mengen $\mathcal{A}_{\nu, l}$ und $\mathcal{B}_{\nu, l}$ wie folgt definiert sind.

Ist v_ν semisingulär bzgl. Δ_ν , dann sei $\mathcal{A}_{\nu, 0} = \emptyset$. Ist v_ν nicht semisingulär bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, enthalte $\mathcal{A}_{\nu, 0}$ für ein $\tilde{l}_\nu \in \{1, \dots, \lambda_\nu\}$ mit der Eigenschaft, dass $e_{\tilde{l}_\nu}$ bzgl. v_ν nicht degeneriert ist, die folgenden BB-Punkte:

- zwei BB-Punkte aus $\{P_{q-4, 3, 1}^{[\nu, l]}, P_{q-4, 4, 0}^{[\nu, l]}, P_{q-4, 1, 3}^{[\nu, l+1]}, P_{q-4, 2, 2}^{[l+1, \nu]}\}$, falls $e_{\nu, l}$ bzgl. v_ν nicht degeneriert ist, $1 \leq l < \tilde{l}_\nu$,
- zwei BB-Punkte aus $\{P_{q-4, 2, 2}^{[\nu, l]}, P_{q-4, 3, 1}^{[\nu, l]}, P_{q-4, 4, 0}^{[\nu, l]}, P_{q-4, 1, 3}^{[\nu, l+1]}\}$, falls $e_{\nu, l}$ bzgl. v_ν nicht degeneriert ist, $\tilde{l}_\nu < l \leq \lambda_\nu$, und
- einen BB-Punkt aus $\{P_{q-4, 3, 1}^{[\nu, \tilde{l}_\nu]}, P_{q-4, 4, 0}^{[\nu, \tilde{l}_\nu]}, P_{q-4, 1, 3}^{[\nu, \tilde{l}_\nu]}\}$.

Für $l = 1, \dots, \lambda_\nu$ seien die Mengen $\mathcal{M}_{5, q}^2(e_{\nu, l})$ und $\tilde{\mathcal{M}}_{5, q}^2(e_{\nu, l})$ wie in Abschnitt 8.1.2 definiert. Dann definieren wir für $l = 1, \dots, \lambda_\nu$

$$\mathcal{A}_{\nu, l} \in \begin{cases} \tilde{\mathcal{M}}_{5, q}^2(e_{\nu, l}), & \text{falls } e_l \text{ bzgl. } v \text{ nicht degeneriert ist,} \\ \mathcal{M}_{5, q}^2(e_{\nu, l}), & \text{falls } e_l \text{ bzgl. } v \text{ degeneriert ist,} \end{cases}$$

so dass $\mathcal{B}_{\nu, l} \subset \mathcal{A}_{\nu, l}$ gilt mit

$$\mathcal{B}_{\nu, l} := \begin{cases} (\{P_{i, j, k}^{[\nu, l]} : j \geq q-3, i+j+k=q\} \setminus \{P_{0, q-3, 3}^{[\nu, l]}\}) \cup \{P_{q-3, 3, 0}^{[\nu, l]}\}, & \text{falls } e_{\nu, l} \text{ bzgl. } v_\nu \\ & \text{degeneriert ist,} \\ \{P_{i, j, k}^{[\nu, l]} : j \geq q-3, i+j+k=q\} \setminus \{P_{0, q-3, 3}^{[\nu, l]}\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (12.4)$$

Fall 2: Es gilt $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ und $\lambda_\nu = 0$, $\nu \geq 2$.

Dann sei

$$\mathcal{A}_{K_\nu} := \{P_{i,j,k}^{[\nu,1]} : j, k \geq 3, (i, j, k) \neq (0, 3, q-3), (0, q-3, 3)\} \setminus \mathcal{P}_\nu.$$

Fall 3: $v_\nu \in V_B$ ist ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, $\nu \geq 2$.

Dann sei

$$\mathcal{A}_{K_\nu} := \{P_{i,j,k}^{[\nu,1]} : i \geq 3, (i, j, k) \neq (3, q-3, 0), (3, 0, q-3)\} \setminus D_3(v_\nu).$$

Fall 4: Es gilt $\nu = 1$ oder für $\nu \geq 2$ ist $v_\nu \in V_I$ ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$.

Dann sei für $\nu = 1, \dots, n_\nu$ die Menge $\mathcal{B}_{\nu,l}$ wie in (12.4) definiert, und es sei

$$\mathcal{B}_\nu := \{P_{q-3,3,0}^{[\nu,l]} : e_{\nu,l} \text{ ist bzgl. } v_\nu \text{ degeneriert}, 1 \leq l \leq n_\nu\}.$$

Die Menge \mathcal{A} sei auf Δ_{v_ν} wie in (9.23) gegeben, so dass $\mathcal{B}_\nu \subset \mathcal{A}$ und $\mathcal{B}_{\nu,l} \subset \mathcal{A}$, $l = 1, \dots, n_\nu$, gilt. Dann sei

$$\mathcal{A}_{K_\nu} := \mathcal{A} \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{n_\nu} D_3(v_{\nu,l}) \cup D_3(v_\nu) \cup \{P_{i,j,k}^{[\nu,1]} : i \leq 2, i+j+k=q\} \cup \mathcal{P}_\nu \right).$$

Ferner sei \mathcal{A}_v für alle $v \in V^*$ eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta)$, $q \geq 8$, auf $D_3(v)$, die wie in (9.23) oder (9.25) gegeben ist, falls $v \in V_I^*$ gilt, und die wie (9.27) gegeben ist, falls $v \in V_B^*$ gilt. Dann definieren wir

$$\mathcal{A} := (\bigcup_{v \in V} \mathcal{A}_v) \cup (\bigcup_{\nu=1}^n \mathcal{A}_{K_\nu}). \quad (12.5)$$

Theorem 12.1. *Sei $q \geq 8$. Dann ist \mathcal{A} wie in (12.5) eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta)$.*

Beweis. Sei $q \geq 8$ und es gelte $s \in S_q^2(\Delta)$. Ist s in der BB-Darstellung (2.5) gegeben, bezeichne $a_{i,j,k}^{[\nu,l]}$, $i+j+k=q$, die Bézier-Koeffizienten von $s|_{T^{[\nu,l]}}$, $\nu = 1, \dots, n$, $l = 1, \dots, n_\nu$. Wir zeigen zunächst, dass \mathcal{A} eine bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta)$ ist. Es gelte $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{A}$. Dann ist zu zeigen, dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in \mathcal{B}_q(\Delta)$ gilt. Nach Definition von \mathcal{A} folgt direkt

$$\lambda_P s = 0, \quad P \in \bigcup_{v \in V} D_3(v). \quad (12.6)$$

Wir zeigen im Folgenden, dass für $\nu = 1, \dots, n$

$$\lambda_P s = 0, \quad P \in (\bigcup_{v \in V} \mathcal{A}_v) \cup (\bigcup_{\mu=1}^\nu \mathcal{A}_{K_\mu}) \quad \Rightarrow \quad \lambda_P s = 0, \quad P \in \mathcal{B}_q(\Delta_\nu) \quad (12.7)$$

gilt.

Beweis von (12.7) durch vollständige Induktion nach ν .

Induktionsanfang $\nu = 1$. Nach Konstruktion von \mathcal{A}_{K_1} erhalten wir mit (12.6) sowie mit Theorem 9.4 direkt

$$\lambda_P s = 0, \quad P \in \mathcal{B}_q(\Delta_1) \setminus \mathcal{P}_1. \quad (12.8)$$

Gilt $\mathcal{P}_1 = \emptyset$, folgt damit bereits die Behauptung. Gilt $\mathcal{P}_1 \neq \emptyset$, dann sei $v_{1,l}$, $l \in \{1, \dots, n_1\}$, entweder ein Fillpunkt bzgl. Δ_1 oder ein nicht singulärer Eckpunkt, der bzgl. Δ_1 semisingulär ist. O.B.d.A. sei $v_{1,l}$ semisingulär vom Typ II bzgl. Δ_1 , und es gelte $P_{1,3,q-4}^{[1,l+1]} \in \mathcal{P}_1$. Wir zeigen, dass in diesem Fall $a_{1,3,q-4}^{[1,l+1]} = 0$ folgt. (Der Fall $P_{1,q-4,3}^{[1,l]} \in \mathcal{P}_1$ und der Fall, dass $v_{1,l}$ ein Fillpunkt oder semisingulär vom Typ I bzgl. Δ_1 ist, lassen sich analog zeigen.) Wir nummerieren die Dreiecke mit Eckpunkt $v_{1,l}$, die nicht in Δ_1 enthalten sind, gegen den Uhrzeigersinn mit $T^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, d.h. es gilt $T^{(1)} = \Delta(v_{1,l}, w_1, v_{1,l-1})$, $T^{(2)} = \Delta(v_{1,l}, w_2, w_1)$ und $T^{(3)} = \Delta(v_{1,l}, v_{1,l+1}, w_2)$, wobei w_1, w_2 die Eckpunkte außerhalb von Δ_1 bezeichnen. Für $j = 1, 2$ sei e_j die gemeinsame Kante von $T^{(j)}$ und $T^{(j+1)}$. Ferner seien die Koeffizienten von $p_j \in \tilde{\Pi}_q$ auf $T^{(j)}$ mit $a_{\alpha,\beta,\gamma}^{(j)}$ bezeichnet, $\alpha + \beta + \gamma = q$ und $j = 1, 2, 3$. Mit (12.8) gilt insbesondere $\lambda_P s = 0$ für $P \in (D_4(v_{1,l}) \cap \mathcal{B}_q(\Delta_1)) \setminus \{P_{1,3,q-4}^{[1,l+1]}\}$. Ferner folgt mit (12.6), dass $\lambda_P s = 0$ für alle $P \in D_3(v_{1,l})$ gilt. Da $T^{(1)}$ eine gemeinsame Kante mit $T^{[1,l]}$ hat, folgt aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen an dieser Kante, dass $a_{q-4,1,3}^{(1)} = a_{q-4,2,2}^{(1)} = 0$ gilt. Ferner gilt $a_{q-4,2,2}^{(2)} = a_{q-4,3,1}^{(2)} = a_{q-4,1,3}^{(3)} = a_{q-4,2,2}^{(3)} = 0$, da e_1 und e_2 degeneriert sind. Da $\tilde{e}_{1,l+1}$ nach Voraussetzung bzgl. $v_{1,l}$ nicht degeneriert ist, folgt dann aus der C^2 -Stetigkeitsbedingung an der Kante $\tilde{e}_{1,l+1}$, dass $a_{1,3,q-4}^{[1,l+1]} = 0$ gilt. Somit gilt die Behauptung (12.7) für $\nu = 1$.

Induktionsschritt $\nu - 1 \rightarrow \nu$. Die Behauptung (12.7) sei für $\nu - 1$ bereits bewiesen. Somit gilt $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_q(\Delta_{\nu-1})$. Aus den C^2 -Stetigkeitsbedingungen an den Kanten $e_{\nu,0}$ und $e_{\nu,\lambda_\nu+1}$ folgt direkt, dass $\lambda_P s = 0$, $P \in R_2(K_\nu)$, gilt, wobei $R_2(K_\nu)$ wie in (8.2) definiert ist.

Fall 1: Es gilt $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ und $\lambda_\nu \geq 1$. Mit (12.6) folgt analog zum Beweis von Theorem 8.23, dass $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_q(K_\nu) \setminus \mathcal{P}_\nu$ gilt. Ist $\mathcal{P}_\nu \neq \emptyset$, folgt analog zum Beweis des Falls $\nu = 1$ die Behauptung.

Fall 2: Es gilt $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ und $\lambda_\nu = 0$. Mit (12.6) und nach Konstruktion von \mathcal{A}_{K_ν} erhalten wir $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_q(K_\nu) \setminus \mathcal{P}_\nu$. Gilt $\mathcal{P}_\nu \neq \emptyset$, folgt die Behauptung (12.7) analog zum Beweis des Falls $\nu = 1$.

Fall 3: Es gilt $v_\nu \notin V_B^{(\nu-1)}$ und $v_\nu \in V_B$. Dann folgt die Behauptung (12.7) direkt mit (12.6) und nach Konstruktion von \mathcal{A}_{K_ν} .

Fall 4: Es gilt $v_\nu \notin V_B^{(\nu-1)}$ und $v_\nu \in V_I$. Mit (12.6) folgt analog zum Beweis von Theorem 9.4, dass $\lambda_P s = 0$, $P \in \mathcal{B}_q(K_\nu) \setminus \mathcal{P}_\nu$, gilt. Ist $\mathcal{P}_\nu \neq \emptyset$, folgt analog zum Beweis des Falls $\nu = 1$ die Behauptung. \square

Es bleibt zu zeigen, dass \mathcal{A} minimal ist. Wir zeigen im Folgenden, dass für $\mathcal{A}_\nu := \cup_{\mu=1}^\nu \mathcal{A}_{K_\mu}$, $\nu = 1, \dots, n$,

$$|\mathcal{A}_\nu| = \frac{(q+1)(q+2)}{2} - 30 + |E_I^{(\nu)}| \frac{q^2 - 3q - 22}{2} - |V_I^{(\nu)}| \left(\frac{(q+1)(q+2)}{2} - 30 \right) - \sum_{\mu=1}^\nu |\mathcal{P}_\mu| + |\tilde{V}^{(\nu)}| + \sum_{v \in V_I^{(\nu)}} \sigma_v^* \quad (12.9)$$

gilt, wobei $\tilde{V}^{(\nu)}$ die Menge der nicht singulären Eckpunkte v_μ , $2 \leq \mu \leq \nu$, bezeichnet, die entweder ein Fillpunkt oder semisingulär bzgl. $\Delta_{\mu-1}$ sind. Ferner gelte für alle $v \in V_I$

$$\sigma_v^* := \begin{cases} 1, & \text{falls } v \text{ singulär ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Konstruktion enthält \mathcal{P}_ν für jeden semisingulären Eckpunkt $v_{\nu,l}$ von K_ν bzgl. Δ_ν , von dem mindestens eine Randkante von K_ν ausgeht, die bzgl. $v_{\nu,l}$ nicht degeneriert ist, einen BB-Punkt. Somit gilt offensichtlich

$$\sum_{\nu=1}^n |\mathcal{P}_\nu| = |\tilde{V}^{(n)}|. \quad (12.10)$$

Beweis von (12.9) durch vollständige Induktion nach ν .

Induktionsanfang $\nu = 1$. Nach Konstruktion gilt

$$|\mathcal{A}_1| = n_1 \frac{q^2 - 3q - 22}{2} + \sigma_{v_1}^* - |\mathcal{P}_1|.$$

Da $|V_I^{(1)}| = 1$, $|E_I^{(1)}| = n_1$ und $|\tilde{V}^{(1)}| = 0$ gilt, folgt damit bereits (12.9).

Induktionsschritt $\nu - 1 \rightarrow \nu$. Die Behauptung (12.9) sei für $\nu - 1$ bereits bewiesen. Ist $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$, dann gilt $|E^{(\nu)}| = |E^{(\nu-1)}| + (\lambda_\nu + 2)$ und $|V^{(\nu)}| = |V^{(\nu-1)}| + 1$. Ferner gilt $|\tilde{V}^{(\nu)}| = |\tilde{V}^{(\nu-1)}|$, falls $v_\nu \notin \tilde{V}^{(\nu)}$ ist, und es gilt $|\tilde{V}^{(\nu)}| = |\tilde{V}^{(\nu-1)}| + 1$, falls $v_\nu \in \tilde{V}^{(\nu)}$ ist. Nach Konstruktion von \mathcal{A}_ν gilt

$$|\mathcal{A}_\nu| = |\mathcal{A}_{\nu-1}| + \begin{cases} \frac{(q-4)(q-5)}{2} + \lambda \frac{q^2 - 3q - 22}{2} - 3 + \sigma_{v_\nu}^* - |\mathcal{P}_\nu|, & v_\nu \notin \tilde{V}^{(\nu)}, \\ \frac{(q-4)(q-5)}{2} + \lambda \frac{q^2 - 3q - 22}{2} - 2 - |\mathcal{P}_\nu|, & v_\nu \in \tilde{V}^{(\nu)}. \end{cases}$$

Nach Induktionsannahme folgt dann (12.9). Ist $v_\nu \in V_I$ ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, gilt nach Konstruktion von Δ_ν $|E^{(\nu)}| = |E^{(\nu-1)}| + (n_\nu + 1)$, $|V^{(\nu)}| = |V^{(\nu-1)}| + 1$ und $|\tilde{V}^{(\nu)}| = |\tilde{V}^{(\nu-1)}|$. Nach Konstruktion von \mathcal{A}_ν gilt

$$|\mathcal{A}_\nu| = |\mathcal{A}_{\nu-1}| + n_\nu \frac{q^2 - 3q - 22}{2} - 3(q - 6) + \sigma_{v_\nu}^* - |\mathcal{P}_\nu|$$

Nach Induktionsannahme folgt dann (12.9). Ist $v_\nu \in V_B$ ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, gilt nach Konstruktion von Δ_ν $|E^{(\nu)}| = |E^{(\nu-1)}| + 1$, $|V^{(\nu)}| = |V^{(\nu-1)}|$, $|\tilde{V}^{(\nu)}| = |\tilde{V}^{(\nu-1)}|$ und $|\mathcal{P}_\nu| = 0$. Nach Konstruktion von \mathcal{A}_ν gilt

$$|\mathcal{A}_\nu| = |\mathcal{A}_{\nu-1}| + \frac{(q-1)(q-2)}{2} - 12,$$

so dass nach Induktionsannahme (12.9) folgt. \square

Aus (12.9) und (12.10) folgt

$$|\mathcal{A}_n| = \frac{(q+1)(q+2)}{2} - 30 + |E_I| \frac{q^2 - 3q - 22}{2} - |V_I| \frac{(q+1)(q+2) - 60}{2} + \sum_{v \in V_I} \sigma_v^*.$$

Für $v \in V$ definieren wir

$$\tilde{\sigma}_v := \begin{cases} 2, & \text{falls } v \text{ singulär ist,} \\ 1, & \text{falls } v \text{ nicht singulär und } e_v < 4 \text{ ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt offensichtlich für alle $v \in V_I$, dass $\sigma_v = \tilde{\sigma}_v + \sigma_v^*$. Nach Konstruktion erhalten wir ferner

$$|\mathcal{A}_v| = \begin{cases} n_v + 6 + \tilde{\sigma}_v, & v \in V_I, \\ n_v + 8, & v \in V_B. \end{cases}$$

Mit (2.1) und (2.2) gilt dann

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| &= \sum_{v \in V} |\mathcal{A}_v| + |\mathcal{A}_n| \\ &= \sum_{v \in V_I} (n_v + 6 + \tilde{\sigma}_v) + \sum_{v \in V_B} (n_v + 8) + |\mathcal{A}_n| \\ &= 2|E| + 6|V_I| + 8|V_B| + \sum_{v \in V_I} \tilde{\sigma}_v + \frac{(q+1)(q+2)}{2} - 30 + |E_I| \frac{q^2 - 3q - 22}{2} \\ &\quad - |V_I| \frac{(q+1)(q+2) - 60}{2} + \sum_{v \in V_I} \sigma_v^* \\ &= \frac{(q+1)(q+2)}{2} + |E_I| \frac{(q-1)(q-2)}{2} - |V_I| \frac{(q+1)(q+2)}{2} + 6|V_I| + \sum_{v \in V_I} \sigma_v. \end{aligned}$$

Aus den Theoremen 2.3 und 2.4 folgt somit, dass \mathcal{A} eine minimal bestimmende Menge von $S_q^2(\Delta)$ ist. \blacksquare

12.2 Hermite-Interpolation

Sei Δ eine beliebige Triangulierung. Dann erhalten wir mittels Algorithmus 2 eine Kette von Teiltriangulierungen $\Delta_1 \subset \dots \subset \Delta_n = \Delta$ von Δ , die wie in (12.1) definiert sind. Im Folgenden konstruieren wir induktiv eine Klasse von Hermite-Interpolationsmengen für $S_q^2(\Delta)$, $q \geq 8$.

Es sei $\mathcal{E}^* \subset V \times E$, und \mathcal{E}^* enthalte die folgenden Elemente:

- Ist $v_{1,l}$, $1 \leq l \leq n_1$, ein nicht singulärer Eckpunkt, der entweder ein Fillpunkt oder semisingulär bzgl. Δ_1 ist, gelte entweder $(v_{1,l}, \tilde{e}_{1,l}) \in \mathcal{E}^*$ oder $(v_{1,l}, \tilde{e}_{1,l+1}) \in \mathcal{E}^*$.
- Sei $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$, $\nu \geq 2$.
 - Ist $v_{\nu,0}$ ein nicht singulärer Eckpunkt, der entweder ein Fillpunkt oder aber semisingulär bzgl. Δ_ν ist, und ist ferner $\tilde{e}_{\nu,1}$ bzgl. $v_{\nu,0}$ nicht degeneriert, gelte $(v_{\nu,0}, \tilde{e}_{\nu,1}) \in \mathcal{E}^*$.
 - Ist $v_{\nu,l}$, $1 \leq l \leq \lambda_\nu$, ein nicht singulärer Eckpunkt, der entweder ein Fillpunkt oder semisingulär bzgl. Δ_ν ist, gelte entweder $(v_{\nu,l}, \tilde{e}_{\nu,l}) \in \mathcal{E}^*$ oder $(v_{\nu,l}, \tilde{e}_{\nu,l+1}) \in \mathcal{E}^*$.
 - Ist $v_{\nu,\lambda_\nu+1}$ ein nicht singulärer Eckpunkt, der entweder ein Fillpunkt oder semisingulär bzgl. Δ_ν ist, und ist ferner $\tilde{e}_{\nu,\lambda_\nu+1}$ bzgl. $v_{\nu,\lambda_\nu+1}$ nicht degeneriert, gelte $(v_{\nu,\lambda_\nu+1}, \tilde{e}_{\nu,\lambda_\nu+1}) \in \mathcal{E}^*$.
- Sei $v_\nu \in V_I$ ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, $\nu \geq 2$. Ist $v_{\nu,l}$, $2 \leq l \leq n_\nu - 1$, ein nicht singulärer Eckpunkt, der entweder ein Fillpunkt oder semisingulär bzgl. Δ_ν ist, gelte entweder $(v_{\nu,l}, \tilde{e}_{\nu,l}) \in \mathcal{E}^*$ oder $(v_{\nu,l}, \tilde{e}_{\nu,l+1}) \in \mathcal{E}^*$.

Mit den Bemerkungen 7.1 und 7.2 folgt für alle $(v, e) \in \mathcal{E}^*$, dass die Kante e bzgl. v nicht degeneriert ist.

Konstruktion von Hermite-Interpolationsmengen:

Wir beschreiben zunächst die Hermite-Interpolationsbedingungen, die $s \in S_q^2(\Delta)$, $q \geq 8$, für jeden Eckpunkt $v \in V$ erfüllen muss. Sei $n_v = \deg(v)$. Ist $v \in V_I$, dann seien die Eckpunkte und Dreiecke von Δ_v wie in Abbildung 4.6 nummeriert, und es gelte $e_l := [v, v_l]$, $l = 0, \dots, n_v - 1$. Für $v \in V_B$ nummerieren wir die Eckpunkte von Δ_v gegen den Uhrzeigersinn mit v_0, \dots, v_{n_v-1} . Für $l = 0, \dots, n_v - 1$ sei $e_l := [v, v_l]$ und für $l = 1, \dots, n_v - 1$ sei ferner $T^{[l]} := \Delta(v, v_{l-1}, v_l)$. Des Weiteren sei $p^{[l]} := s|_{T^{[l]}}$, $l = 1, \dots, n_v$ bzw. $l = 1, \dots, n_v - 1$. Sei $f \in C(\Omega)$ genügend oft differenzierbar. Dann seien $D^\omega p^{[l]}$ und $D^\omega f$ wie in (2.3) definiert, $l = 1, \dots, n_v$, $\omega \in \mathbb{N}$.

Fall 1: Es gilt $v \in V_I$ und v ist nicht singulär.

Ist $e_v \geq 4$, dann nummerieren wir die inneren Kanten von Δ_v so, dass die Kanten $e_1, e_0, e_{n_v-1}, e_{n_v-2}$ paarweise nicht kollinear sind. Ferner sei $\tilde{l} \in \{1, \dots, n_v - 2\}$. Ist $e_v < 4$, dann nummerieren wir die inneren Kanten von Δ_v so, dass die Kante e_0 bzgl. v nicht degeneriert ist, und es gelte $\tilde{l} \in \{1, \dots, n_v - 1\}$. s erfülle die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

- $D^\omega p^{[l]}(v) = D^\omega f(v)$, $\omega = 0, 1, 2$ für ein $l \in \{1, \dots, n_v\}$,
- $\frac{\partial^3 p^{[l]}}{\partial^{3-\sigma} e_i \partial^\sigma \tilde{e}_i}(v) = \frac{\partial^3 f}{\partial^{3-\sigma} e_i \partial^\sigma \tilde{e}_i}(v)$, $\sigma = 0, 1, 2$, und
- $\frac{\partial^3 p^{[l]}}{\partial^3 e_l}(v) = \frac{\partial^3 f}{\partial^3 e_l}(v)$ für $l = 1, \dots, n_v - 2$, $l \neq \tilde{l}$, falls $e_v \geq 4$ gilt, bzw. für $l = 1, \dots, n_v - 1$, $l \neq \tilde{l}$, falls $e_v < 4$ gilt.

Fall 2: $v \in V_I$ ist singulär.

Dann erfülle s die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

- $D^\omega p^{[l]}(v) = D^\omega f(v)$, $\omega = 0, 1, 2$, für ein $l \in \{1, \dots, 4\}$,
- $\frac{\partial^3 p^{[l]}}{\partial^3 e_l}(v) = \frac{\partial^3 f}{\partial^3 e_l}(v)$, $l = 1, \dots, 4$,
- $\frac{\partial^3 p^{[l]}}{\partial^2 e_l \partial \tilde{e}_l}(v) = \frac{\partial^3 f}{\partial^2 e_l \partial \tilde{e}_l}(v)$ für ein $l \in \{1, 3\}$ sowie für ein $l \in \{2, 4\}$.

Fall 3: Es gilt $v \in V_B$.

Dann erfülle s für ein $\tilde{l} \in \{1, \dots, n_v - 1\}$ die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

- $D^\omega p^{[\tilde{l}]}(v) = D^\omega f(v)$, $\omega = 0, 1, 2, 3$,
- $\frac{\partial^3 p^{[l]}}{\partial^3 e_l}(v) = \frac{\partial^3 f}{\partial^3 e_l}(v)$, $l = 0, \dots, n_v$, $l \neq \tilde{l} - 1, \tilde{l}$.

Für $\nu = 0, \dots, n$ erfülle s ferner die folgenden Bedingungen. Es seien $D^\omega p^{[\nu, l]}$ und $D^\omega f$ wie in (2.3) definiert.

Fall 1: Für $\nu \geq 2$ gilt $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ und $\lambda_\nu \geq 1$.

Es sei $l^* \in \{1, \dots, \lambda_\nu + 1\}$. Ist v_ν nicht semisingulär bzgl. $\Delta_{\nu-1}$, dann sei ferner $\tilde{l} \in \{1, \dots, \lambda_\nu\}$ so gegeben, dass die Kante $e_{\nu, \tilde{l}}$ bzgl. v_ν nicht degeneriert ist. s erfülle die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

- $\frac{\partial^4 p^{[\nu, l]}}{\partial^4 e_{\nu, l}}(v_\nu) = \frac{\partial^4 f}{\partial^4 e_{\nu, l}}(v_\nu)$ für $l = 1, \dots, \lambda_\nu$,

- $\frac{\partial^4 p^{[\nu,l]}}{\partial^3 e_{\nu,l} \partial e_{\nu,l-1}} (v_\nu) = \frac{\partial^4 f}{\partial^3 e_{\nu,l} \partial e_{\nu,l-1}} (v_\nu)$ oder $\frac{\partial^4 p^{[\nu,l+1]}}{\partial^3 e_{\nu,l} \partial e_{\nu,l+1}} (v_\nu) = \frac{\partial^4 f}{\partial^3 e_{\nu,l} \partial e_{\nu,l+1}} (v_\nu)$ für $l = 1, \dots, \lambda$, $l \neq \tilde{l}$, falls v_ν nicht semisingulär bzgl. $\Delta_{\nu-1}$ ist, und anderenfalls für $l = 1, \dots, \lambda_\nu$,
- $D^\omega p^{[\nu,l]}(v_{\nu,l}) = D^\omega f(v_{\nu,l})$, $\omega = 4, \dots, q-3$, für $l = 1, \dots, \lambda_\nu + 1$, $l \neq l^*$, außer $\frac{\partial^{\rho+\sigma} p^{[\nu,l]}}{\partial^\rho e_{\nu,l} \partial^\sigma \tilde{e}_{\nu,l}} (v_{\nu,l}) = \frac{\partial^{\rho+\sigma} f}{\partial^\rho e_{\nu,l} \partial^\sigma \tilde{e}_{\nu,l}} (v_{\nu,l})$ für $(\rho, \sigma) = (q-3, 0), (q-4, 1), (q-4, 0), (0, q-3)$ sowie für $(\rho, \sigma) = (1, 3)$, falls $(v_{\nu,l}, \tilde{e}_{\nu,l}) \in \mathcal{E}^*$ gilt, und für $(\rho, \sigma) = (1, q-4)$, falls $(v_{\nu,l-1}, \tilde{e}_{\nu,l}) \in \mathcal{E}^*$ gilt, und
- $\frac{\partial^{\rho+\sigma} p^{[\nu,l^*]}}{\partial^\rho \tilde{e}_{\nu,l^*} \partial^\sigma e_{\nu,l^*}} (v_{\nu,l^*}) = \frac{\partial^{\rho+\sigma} f}{\partial^\rho \tilde{e}_{\nu,l^*} \partial^\sigma e_{\nu,l^*}} (v_{\nu,l^*})$ für $\rho = 3, \dots, q-4$ und $\sigma = 0, \dots, q-3-\rho$ außer für $(\rho, \sigma) = (3, 0)$ sowie außer für $(\rho, \sigma) = (3, 1)$, falls $(v_{\nu,l^*}, \tilde{e}_{\nu,l^*}) \in \mathcal{E}^*$ gilt, und $(\rho, \sigma) = (q-4, 1)$, falls $(v_{\nu,l^*-1}, \tilde{e}_{\nu,l^*}) \in \mathcal{E}^*$ gilt.

Fall 2: Es gilt $v_\nu \in V_B^{(\nu-1)}$ und $\lambda_\nu = 0$, $\nu \geq 2$.

Dann erfülle s die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

- $\frac{\partial^{\rho+\sigma} p^{[\nu,1]}}{\partial^\rho \tilde{e}_{\nu,1} \partial^\sigma e_{\nu,1}} (v_{\nu,1}) = \frac{\partial^{\rho+\sigma} f}{\partial^\rho \tilde{e}_{\nu,1} \partial^\sigma e_{\nu,1}} (v_{\nu,1})$ für $\rho = 3, \dots, q-4$ und $\sigma = 0, \dots, q-3-\rho$ außer für $(\rho, \sigma) = (3, 0)$ sowie außer für $(\rho, \sigma) = (3, 1)$, falls $(v_{\nu,1}, \tilde{e}_{\nu,1}) \in \mathcal{E}^*$ gilt, und $(\rho, \sigma) = (q-4, 1)$, falls $(v_{\nu,0}, \tilde{e}_{\nu,1}) \in \mathcal{E}^*$ gilt.

Fall 3: $v_\nu \in V_B$ ist ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$.

Dann erfülle s die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

- $\frac{\partial^{\rho+\sigma} p^{[\nu,1]}}{\partial^\rho e_{\nu,1} \partial^\sigma \tilde{e}_{\nu,1}} (v_{\nu,1}) = \frac{\partial^{\rho+\sigma} f}{\partial^\rho e_{\nu,1} \partial^\sigma \tilde{e}_{\nu,1}} (v_{\nu,1})$ für $\rho = 3, \dots, q-4$ und $\sigma = 0, \dots, q-\rho$ außer für $(\rho, \sigma) = (3, 0), (3, q-3)$.

Fall 4: Es gilt $\nu = 1$ oder es gilt $\nu \geq 2$ und $v_\nu \in V_I$ ist ein Flappunkt bzgl. $\Delta_{\nu-1}$.

Ist v_ν nicht singular, dann sei $\tilde{l} \in \{1, \dots, n_\nu\}$ so gegeben, dass die Kante $e_{\nu,\tilde{l}}$ bzgl. v_ν nicht degeneriert ist. s erfülle die folgenden Hermite-Interpolationsbedingungen:

- $\frac{\partial^4 p^{[\nu,l]}}{\partial^4 e_{\nu,l}} (v_\nu) = \frac{\partial^4 f}{\partial^4 e_{\nu,l}} (v_\nu)$ für $l = 1, \dots, n_\nu$,
- $\frac{\partial^4 p^{[\nu,l]}}{\partial^3 e_{\nu,l} \partial e_{\nu,l-1}} (v_\nu) = \frac{\partial^4 f}{\partial^3 e_{\nu,l} \partial e_{\nu,l-1}} (v_\nu)$ oder $\frac{\partial^4 p^{[\nu,l+1]}}{\partial^3 e_{\nu,l} \partial e_{\nu,l+1}} (v_\nu) = \frac{\partial^4 f}{\partial^3 e_{\nu,l} \partial e_{\nu,l+1}} (v_\nu)$ für $l = 1, \dots, \lambda$, $l \neq \tilde{l}$, falls v_ν nicht singular ist, bzw. anderenfalls für $l = 1, \dots, 4$,
- $\frac{\partial^4 p^{[\nu,l]}}{\partial^2 e_{\nu,l} \partial^2 e_{\nu,l-1}} (v_\nu) = \frac{\partial^4 f}{\partial^2 e_{\nu,l} \partial^2 e_{\nu,l-1}} (v_\nu)$ für ein $l \in \{1, \dots, n_\nu\}$,

- $D^\omega p^{[\nu,l]}(v_{\nu,l}) = D^\omega f(v_{\nu,l})$, $\omega = 4, \dots, q-3$, für $\begin{cases} l = 1, \dots, n_1, & \nu = 1 \\ l = 2, \dots, n_\nu, & \nu \geq 2, \end{cases}$
außer $\frac{\partial^{\rho+\sigma} p^{[\nu,l]}}{\partial^\rho e_{\nu,l} \partial^\sigma \tilde{e}_{\nu,l}}(v_{\nu,l}) = \frac{\partial^{\rho+\sigma} f}{\partial^\rho e_{\nu,l} \partial^\sigma \tilde{e}_{\nu,l}}(v_{\nu,l})$ für $(\rho, \sigma) = (q-3, 0), (q-4, 1), (q-4, 0),$
 $(0, q-3)$ sowie für $(\rho, \sigma) = (1, 3)$, falls $(v_{\nu,l}, \tilde{e}_{\nu,l}) \in \mathcal{E}^*$ gilt und für $(\rho, \sigma) = (1, q-4)$,
falls $(v_{\nu,l-1}, \tilde{e}_{\nu,l}) \in \mathcal{E}^*$ gilt, und
- $\frac{\partial^{\rho+\sigma} p^{[\nu,1]}}{\partial^\rho e_{\nu,1} \partial^\sigma \tilde{e}_{\nu,1}}(v_{\nu,1}) = \frac{\partial^{\rho+\sigma} f}{\partial^\rho e_{\nu,1} \partial^\sigma \tilde{e}_{\nu,1}}(v_{\nu,1})$ für $\rho = 3, \dots, q-4$ und $\sigma = 0, \dots, q-\rho$
außer $(\rho, \sigma) = (3, 0), (3, q-3)$, falls $\nu \geq 2$ gilt.

Theorem 12.2. *Sei $q \geq 8$. Dann ist V eine Hermite-Interpolationsmenge von $S_q^2(\Delta)$.*

Beweis. Mit den Beziehungen (2.7) zwischen den partiellen Ableitungen und den Bézier-Koeffizienten von s erhalten wir zunächst für alle $v \in V$, dass die Hermite-Interpolationsbedingungen die Bézier-Koeffizienten einer Menge $\mathcal{A}_v \in \mathcal{M}_3^2(v)$ eindeutig bestimmen, wobei $\mathcal{M}_3^2(v)$ wie in Abschnitt 9.1 definiert ist, falls $v \in V_I^*$ gilt, bzw. wie in Abschnitt 9.2 definiert ist, falls $v \in V_B^*$ gilt. Somit folgt, dass s für alle $v \in V$ auf $D_3(v)$ eindeutig bestimmt ist. Mit den Beziehungen (2.7) erhalten wir ferner, dass die Hermite-Interpolationsbedingungen die Bézier-Koeffizienten einer Menge \mathcal{A} , die wie in (12.5) definiert ist, eindeutig bestimmen. ■

Literaturverzeichnis

- [1] M. H. Adam, *Bivariate Spline-Interpolation auf Crosscut-Partitionen*, Dissertation, Universität Mannheim, 1995.
- [2] P. Alfeld, B. Piper und L. L. Schumaker, Minimally supported bases for spaces of bivariate piecewise polynomials of smoothness r and degree $d \geq 4r + 1$, *Comp. Aided Geom. Design* **4** (1987), 105–123.
- [3] P. Alfeld und L. L. Schumaker, The dimension of bivariate spline spaces of smoothness r for degree $d \geq 4r + 1$, *Constr. Approx.* **3** (1987), 189–197.
- [4] P. Bézier, *Essay de définition numérique des courbes et de surfaces expérimentales*, Dissertation, Université de Paris, 1977.
- [5] L. J. Billera, Homology of smooth splines: generic triangulations and a conjecture of Strang, *Trans. Am. Math. Soc.* **310**, 2 (1988), 325–340.
- [6] C. de Boor, *A practical guide to splines*, Springer, New York, 1978.
- [7] C. de Boor, B-form basics, in: G. Farin (Hg.), *Geometric Modeling*, SIAM, Philadelphia, 1987, 131–148.
- [8] C. de Boor und K. Höllig, Approximation power of smooth bivariate pp functions, *Math. Z.* **197** (1988), 343–363.
- [9] P. de Casteljau, Courbes et surfaces à poles, *André Citroën, Automobiles SA*, Paris, 1963.
- [10] C. K. Chui, *Multivariate splines*, CBMS 54, SIAM, Philadelphia, 1988.
- [11] C. K. Chui und T. X. He, On location of sample points in C^1 quadratic bivariate spline interpolation, in: L. Collatz, G. Meinardus und G. Nürnberger (Hg.), *Numerical Methods of Approximation Theory*, ISNM 81, Birkhäuser, Basel, 1987, 30–43.
- [12] C. K. Chui und D. Hong, Construction of local C^1 quartic spline elements for optimal-order approximation, *Math. Comp.* **65** (1996), 85–98.

- [13] C. K. Chui und D. Hong, Swapping edges of arbitrary triangulations to achieve the optimal order of approximation, *SIAM J. Numer. Anal.* **34** (1997), 1472–1482.
- [14] C. K. Chui und M.-J. Lai, On multivariate vertex splines and applications, in: C. Chui, L. L. Schumaker und F. Utreras (Hg.), *Topics in Multivariate Approximation*, Academic Press, New York, 1987, 19–36.
- [15] C. K. Chui, D. Hong und Q. Jia, Stability of optimal-order approximation by bivariate splines over arbitrary triangulations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), 3301–3318.
- [16] R. W. Clough und J. L. Tocher, Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending, in: *Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright Patterson A.F.B., Ohio, 1965.
- [17] O. Davydov, Locally linearly independent basis for C^1 bivariate splines of degree $q \geq 5$, in: M. Daehlen, T. Lyche und L. L. Schumaker (Hg.), *Mathematical Methods for Curves and Surfaces II*, Vanderbilt University Press, Nashville, 1998, 71–77.
- [18] O. Davydov und G. Nürnberger, Interpolation by C^1 splines of degree $q \geq 4$ on triangulations, *J. Comput. Appl. Math.* **126** (2000), 159–183.
- [19] O. Davydov, G. Nürnberger und F. Zeilfelder, Interpolation by cubic splines on triangulations, in: C.K. Chui und L.L. Schumaker (Hg.), *Approximation Theory IX*, Vanderbilt University Press, Nashville, 1998, 17–24.
- [20] O. Davydov, G. Nürnberger und F. Zeilfelder, Cubic spline interpolation on nested polygon triangulations, in: A. Cohen, C. Rabut und L.L. Schumaker (Hg.), *Curve and Surfaces Fitting, St. Malo 1999, France*, Nashville, 2000, 161–170.
- [21] O. Davydov, G. Nürnberger und F. Zeilfelder, Bivariate spline interpolation with optimal approximation order, *Constr. Approx.* **17** (2001), 181–208.
- [22] O. Davydov, G. Nürnberger, G. Walz und F. Zeilfelder, Interpolation by bivariate splines on crosscut partitions, in: G. Nürnberger, J.W. Schmidt und G. Walz (Hg.), *Multivariate Approximation and Splines*, ISNM 125, Birkhäuser, Basel, 1997, 189–203.
- [23] G. Farin, Triangular Bernstein-Bézier patches, *Comp. Aided Geom. Design* **3** (1986), 83–127.
- [24] G. Fraeijs de Veubeke, Bending and stretching of plates, in: *Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright Patterson A.F.B., Ohio, 1965.

- [25] J. Gao, A remark on interpolation by bivariate splines, *Approx. Theory & Appl.* **7** (1991), 41–50.
- [26] J. Gao, Interpolation by C^1 quartic bivariate splines, *J. Math. Res. Expo.* **11** **3** (1991), 433–442.
- [27] J. Gao und L. Xu, Concerning a problem of interpolation by splines of $S_3^1(\Delta_{m,n}^{(1)})$, *Numer. Math., Nanking* **10** (1988), 55–67.
- [28] Zh. Guo, Zh. Sha und Zh. Wu, On interpolation by splines in $S_k^1(\Delta_{m,n}^i)$, *Chin. Ann. Math. Ser. A* **8** (1987), 368–376.
- [29] D. Hong, Spaces of bivariate spline functions over triangulations, *Approx. Theory Appl.* **7** (1991), 56–75.
- [30] F. Jeeawock-Zedek, Interpolation scheme by C^1 cubic splines on a non uniform type-2 triangulation of a rectangular domain, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **314** (1992), 413–418.
- [31] F. Jeeawock-Zedek, Operator norm and error bounds for interpolating quadratic splines on a non-uniform type-2 triangulation of a rectangular domain, *Approx. Theory and Appl.* **10** **2** (1994), 1–16.
- [32] S. Karlin und Z. Ziegler, Chebyshevian spline functions, *SIAM J. Numer. Anal.* **3** (1966), 514–543.
- [33] N. Kohlmüller, *Lagrange und Hermite Interpolation mit Splineräumen auf Triangulierungen*, Dissertation, Universität Mannheim, 2001.
- [34] M. Laghchim-Lahlou und P. Sablonnière, Composite quadrilateral finite elements of class C^r , in: T. Lyche und L.L. Schumaker (Hg.), *Mathematical Methods in CAGD*, Academic Press, New York, 1989, 413–418.
- [35] M. Laghchim-Lahlou und P. Sablonnière, C^r finite elements of HCT, PS and FVS types, in: J. Periaux und R.P. Shaw (Hg.), *Proceedings of the Fifth International Symposium on Numerical Methods in Engineering*, Vol. 2, Springer, Berlin, 1989, 163–168.
- [36] M. Laghchim-Lahlou und P. Sablonnière, Quadrilateral finite elements of FVS type and class C^r , *Numer. Math.* **30** (1995), 229–243.
- [37] M.-J. Lai und L. L. Schumaker, Scattered data interpolation using C^2 supersplines of degree six, *SIAM J. Numer. Anal.* **34** (1997), 905–921.

- [38] M.-J. Lai und L. L. Schumaker, On the approximation power of bivariate splines, *Adv. in Comp. Math.* **9** (1998), 251–279.
- [39] M.-J. Lai und L. L. Schumaker, Macro elements and stable bases for splines on Clough-Tocher triangulations, *Numer. Math.* **88** (2001), 105–119.
- [40] X. Linag, On the bivariate quartic spline interpolation, *Acta Sci. Nat. Univ. Jilinensis* **4** (1987), 19–28.
- [41] J. Liu, On interpolation by $S_4^1(\Delta_{mn}^{(1)})$, *Nat. Sci. J. Xiangtan Univ.* **13** **4** (1991), 29–35.
- [42] J. Morgan und R. Scott, A nodal basis for C^1 piecewise polynomials of degree $n \geq 5$, *Math. Comp.* **131** (1975), 736–740.
- [43] E. Nadler, Hermite interpolation by C^1 bivariate splines, in: W. Dahmen, M. Gasca und C. Micchelli (Hg.), *Computation of Curves and Surfaces*, Academia de Ciencias Exactas, Zaragoza **2** (1990), 55–66.
- [44] G. Nürnberger, *Approximation by spline functions*, Springer, Berlin, 1989.
- [45] G. Nürnberger, Approximation order of bivariate spline interpolation, *J. Approx. Theory* **87** (1996), 117–136.
- [46] G. Nürnberger und Th. Riessinger, Lagrange and Hermite interpolation by bivariate splines, *Numer. Funct. Anal. and Optimiz.* **13** (1992), 75–96.
- [47] G. Nürnberger und Th. Riessinger, Bivariate spline interpolation at grid points, *Numer. Math.* **71** (1995), 91–119.
- [48] G. Nürnberger und G. Walz, Error analysis in interpolation by bivariate C^1 -Splines, *IMA J. Numer. Anal.* **18** (1998), 485–508.
- [49] G. Nürnberger und F. Zeilfelder, Interpolation by spline spaces on classes of triangulations, *J. Comput. Appl. Math.*, **119** (2000), 347–376.
- [50] G. Nürnberger und F. Zeilfelder, Lagrange-Interpolation by bivariate C^1 -splines with optimal approximation order, erscheint in *Advances in Comp. Math.*, 2002.
- [51] G. Nürnberger, L. L. Schumaker und F. Zeilfelder, Lagrange interpolation by C^1 cubic splines on triangulated quadrangulations, erscheint in *Advances in Comp. Math.*, 2002.
- [52] M. J. D. Powell und M. A. Sabin, Piecewise quadratic approximation on triangles, *ACM Trans. Math. Software* **4** (1977), 316–325.

- [53] Th. Riessinger, Interpolation by bivariate quadratic splines on a four-directional mesh, *Computing* **49** (1992), 129–137.
- [54] G. Sander, Bornes supérieures et inférieures dans l'analyse matricielle des plaques en flexion-torsion, *Bull. Soc. Royale Science Liège* **33** (1964), 456–494.
- [55] I.J. Schoenberg und A. Whitney, On Polya frequency functions III. The positivity of translation determinants with application to the interpolation problem by spline curves, *Trans. Amer. Math. Soc.* **74** (1953), 246–259.
- [56] L. L. Schumaker, On the dimension of spaces of piecewise polynomials in two variables, in: *Multivariate Approximation Theory*, W. Schempp und K. Zeller (Hg.), Birkhäuser-Verlag, Basel, 1979, 396–412.
- [57] L. L. Schumaker, *Spline Functions: Basic Theory*, Wiley-Interscience, New York, 1980.
- [58] L. L. Schumaker, Bounds on the dimension of spaces of multivariate piecewise polynomials, *Rocky Mountain J. Math.* **14** (1984), 251–264.
- [59] L. L. Schumaker, Dual basis for splines spaces on cells, *Comp. Aided Geom. Design* **5** (1988), 277–284.
- [60] Zh. Sha, On interpolation by $S_2^1(\Delta_{m,n}^{(2)})$, *Approx. Theory & Appl.* **2** (1985), 71–82.
- [61] Zh. Sha, On interpolation by $S_3^1(\Delta_{m,n}^{(1)})$, *Approx. Theory & Appl.* **4** (1985), 1–18.
- [62] Zh. Sha und P. Xuan, Periodic bivariate cubic splines on type-II triangulations, *Math. Numer. Sin. 10* **3** (1988), 253–265.
- [63] G. Strang, Piecewise polynomials and the finite element method, *Bull. Amer. Math. Soc.* **79** (1973), 1128–1137.